Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Л. БЕРАН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 55

Л. БЕРАН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Перевод с чешского
В. Н. САЛИЯ

Под редакцией Л. А. СКОРНЯКОВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.144
Б 48
УДК 512

L. Beran
USPOŘÁDANÉ
MNOŽINY
Nakladatelství
Mladá fronta
Praha
1978

Беран Л.
Б 48 Упорядоченные множества: Пер. с чешск. — М.: Наука, 1981, 64 с. — (Популярные лекции по математике). — 15 коп.

Брошюра содержит популярное изложение важного для современной математики понятия частично упорядоченного множества. Рассмотрены понятия точной верхней и точной нижней граней, введены структуры (решетки), рассмотрены алгебраические свойства операций взятия точных граней, введены дистрибутивные структуры.
Для учащихся старших классов средней школы и студентов младших курсов вузов.

Б $\frac{20203-048}{053(02)-81}$ 81-81. 1702030000

ББК 22.144
512

© Ladislav Beran, 1978
© Перевод на русский язык. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1981

Б $\frac{20203-048}{053(02)-81}$ 81-81. 1702030000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА . . 4

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

ВВЕДЕНИЕ 9

Глава 1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА 11
Глава 2. РЕШЕТКИ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА 18
Глава 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕТОК 28
Глава 4. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ РЕШЕТОК 37

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ 50

ПРИЛОЖЕНИЕ 58

ЛИТЕРАТУРА 62

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 63

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Понятие частично упорядоченного множества является фундаментальным для современной теоретико-множественной математики и встречается во многих прикладных вопросах. В предлагаемой вниманию читателя книге содержится популярное изложение этого понятия, а также связанные с ним понятия точной верхней и точной нижней граней, введены решетки (структуры), рассмотрены алгебраические свойства операций взятия точных граней, введены модулярные и дистрибутивные решетки. Автор не излагает сколько-нибудь глубоких теорем. Однако предлагаемые им примеры, задачи и упражнения позволяют овладеть введенными понятиями. От читателя требуется владение основными понятиями теории множеств в объеме средней школы, с популярным изложением которых можно ознакомиться, например, по книгам [1] (гл. I), [6] (гл. III) и [7]. В книгах [6] и [7] можно найти дальнейшие сведения о решетках (структурах) и булевых алгебрах. Для более глубокого изучения этих понятий можно рекомендовать монографии [2], [3], [4], а также § 7 гл. II учебного пособия [5]. При подготовке русского издания были изъяты все ссылки на чешскую литературу. Так что вся библиография, за исключением работ [9] и [10], составлена редактором русского перевода. В оригинале имелись ссылки на доказательства, содержащиеся в книге [9]. В русском переводе они содержатся в «Приложении», написанном редактором.

Л. А. Скорняков

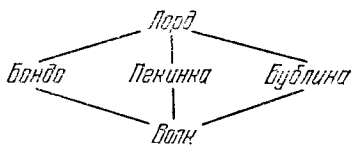
ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория упорядоченных множеств, наиболее разработанная в рамках теории решеток, относится к числу современных математических дисциплин. Книжка, которую вы, дорогие читатели, сейчас открыли, познакомит вас с основными понятиями и методами этого раздела математики. Решая собранные в ней задачи и упражнения, вы сможете усвоить важные конкретные примеры. При этом от вас не потребуется почти никаких навыков в численных расчетах. Но эта математика «без таблицы умножения» тоже имеет свои правила, свой круг проблем, свое очарование. Книжка позволит вам несколько иначе взглянуть и на некоторые понятия школьной программы.

В ходе долгого исторического развития люди постоянно встречались с различными частными случаями упорядочения. Сначала это было упорядочение привычных вещей и повседневных явлений. Позднее — по мере того, как совершенствовались трудовые навыки и мастерство — обнаруживалось упорядочение отдельных этапов в той или иной деятельности, и оно как приобретенный опыт передавалось из поколения в поколение. Так уже с первых робких шагов, с самых первых изготовленных предметов люди обнаруживали все новые виды упорядочения окружающих вещей, своей деятельности.

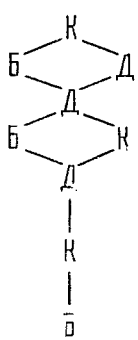
С некоторых из этих упорядочений мы свыклись настолько, что часто их просто не осознаем, как, например, грамматический порядок слов в предложении. Мы постоянно упорядочиваем предметы и явления по тому, насколько они нам нравятся. Так, если нам придется сравнивать голоса певчих птиц, то, конечно, результат будет определяться нашей собственной оценкой их пения. После некоторых размышлений мы согласимся, что имеем дело с упорядочениями и в следующем примере.

Предположим, нужно выстроить каким-то образом наших четвероногих друзей — собак с кличками Бондо, Пекинка, Лорд, Волк, Бублина. Как это можно сделать? Кто-то, очевидно, предложит алфавитный порядок: Бондо — Бублина — Волк — Лорд — Пекинка. Другой расположит лохматых псов в зависимости от того, как они ему нравятся, скажем, так: Лорд — Бондо — Пекинка — Бублина — Волк. Третий же, подумав, расставит их с меньшей определенностью: конечно, больше всех ему нравится Лорд, но вот Бондо, Пекинка и Бублина кажутся ему одинаково милыми, диковатый же Волк не вызывает большой симпатии. И тогда получится такое расположение:



Еще пример. Малыши наблюдают за цветом проезжающих мимо машин. Каждый играющий стремится насчитать как можно больше машин «своего» цвета. Предположим, играют двое. Первому нужно, чтобы проехало как можно больше машин белого цвета (мы их будем обозначать буквой Б), но при этом он внимательно следит и за красными машинами (их мы обозначаем далее буквой К), которые приносят очки его противнику. Машины других цветов (в обозначении Д) игроки отмечают лишь краем глаза.

По схеме



(время у нас идет снизу вверх) мы установим не только то, что к данному моменту игра имеет ничейный результат, но и то, что первой проехала белая машина, потом красная, а за ней как-то иначе окрашенная. Рассуждая далее, видим, что оба наблюдателя отметили одновременное появление белой и красной машин, а спустя некоторое время — белой и машины, которая не была ни красной, ни белой.

Обратимся теперь к несколько иным ситуациям. Наверное, многие из вас в свободное время любят мастерить. Сначала перед вами просто набор различных материалов, а результат — красивая модель парусника, собранный своими руками транзисторный приемник, макет современного здания или велотрека и т. п. Вы хорошо знаете, что для того чтобы добиться успеха в этой своей работе, нужно действовать систематически, другими словами, нужно определенным образом упорядочить свою деятельность. Того же требует от вас и изучение иностранных языков. То же самое происходит и на более высоком уровне — при организации любой производственной деятельности. Здесь большую помощь оказывают человеку различные вычислительные машины — от карманных калькуляторов до огромных автоматических устройств, управляющих целыми предприятиями. Не все знают, что принцип действия этих машин опирается на так называемый булевский тип упорядочения.

Но оказывается, что и в обычных житейских ситуациях вы встречаетесь с подобным способом упорядочения своих рассуждений. Например, ваши планы на сегодняшний день могут зависеть от того, пойдет или не пойдет Иржи в кино, а Ота поедет или не поедет к дяде. Опыт подсказывает вам, что могут представиться следующие четыре варианта:

1) Иржи пойдет, Ота поедет;
2) Иржи пойдет, Ота не поедет;
3) Иржи не пойдет, Ота поедет;
4) Иржи не пойдет, Ота не поедет.

Если вы в своих рассуждениях будете рассматривать эти четыре случая, то это значит, что вы использовали при оценке возможных ситуаций так называемую классическую булевскую логику.

Однако при изучении закономерностей квантовой механики оказалось целесообразным обобщить этот тип

упорядочения — это привело к так называемому ортомодулярному упорядочению. И здесь, таким образом, человек опирается на опыт, приобретенный тысячелетним наблюдением различных упорядочений, и стремится использовать накопленную информацию для углубления своих знаний в области микромира.

Вопросы, затрагиваемые в этой книжке, относятся к сравнительно узкой области теории упорядоченных множеств, они связаны в основном с программой средней школы. Но хочется верить, что, ознакомившись с ними, внимательный читатель осознает полезность понятия упорядочения в элементарной математике и что он по достоинству оценит тот длинный путь познания, который человечество прошло от достаточно неопределенного понятия упорядочения, используемого в разговорном языке, к математическому уточнению этого понятия и к современному уровню его исследования.

ВВЕДЕНИЕ

В школе вы уже усвоили, вероятно, смысл выражения «*число a меньше числа b*» или значение слов «*множество A является подмножеством множества B*». Общим у таких высказываний является то, что они ставят один объект в определенное отношение к другому. В дальнейшем мы и будем изучать подобные отношения. Но сначала уточним само понятие отношения так, чтобы оно могло стать предметом математического исследования.

Чтобы прийти к этому понятию, мы для большей наглядности рассмотрим пример, где участвует конечное число элементов. Вы помните, что о двух числах m, n говорят, что m *делит* n и пишут $m|n$, если существует целое число k такое, что $km = n$ *).

Найдем все числа a, b из множества $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ такие, что $a|b$. Очевидно, мы получим следующие случаи:

$$(1)\qquad \begin{cases} 0|0; \\ 1|0,\ 1|1,\ 1|2,\ 1|3,\ 1|4; \\ 2|0,\ 2|2,\ 2|4; \\ 3|0,\ 3|3; \\ 4|0,\ 4|4. \end{cases}$$

Будем теперь писать $a\delta b$ тогда и только тогда, когда $a, b \in N_4$ и при этом a делит b. Это еще один пример связи между элементами, которую мы хотим включить в общее понятие отношения. Прежде всего договоримся читать запись $a\delta b$ словами «*a находится в отношении* δ

*) Обратите внимание, что согласно этому определению 0 делит 0. — *Прим. ред.*

$c\ b$», и тогда естественным образом приходим к тому, чтобы рассматриваемое отношение назвать отношением δ. Так что же это такое — отношение δ? В соответствии с таблицей (1) $a\delta b$ истинно тогда и только тогда, когда (a, b) является одной из упорядоченных пар *) следующего списка:

$$(2)\qquad \begin{cases} (0, 0); \\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4); \\ (2, 0),\ (2, 2),\ (2, 4); \\ (3, 0),\ (3, 3); \\ (4, 0),\ (4, 4). \end{cases}$$

Это приводит нас к мысли о том, что было бы целесообразно определить отношение δ как множество, элементами которого являются упорядоченные пары из таблицы (2) и только они. При этом условимся рассматривать запись $a\delta b$ как выражение того факта, что пара (a, b) является элементом множества δ, т. е. что $(a, b)\in\delta$.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть A — некоторое непустое множество. *Декартовым квадратом* множества A назовем множество A^2 (обозначаемое также $A\times A$), элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары (a, b), где a, b пробегают множество A. Если ρ — подмножество множества A^2, то будем говорить, что ρ является *отношением* на множестве A. Выражение $(a, b)\in\rho$ считается эквивалентным записи $a\rho b$.

Пример 1. Найти декартов квадрат множества N_4.

Решение. Множество N_4^2 состоит из элементов, которые для наглядности расположим в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{l} (0, 0),\ (0, 1),\ (0, 2),\ (0, 3),\ (0, 4), \\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4), \\ (2, 0),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (2, 4), \\ (3, 0),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3),\ (3, 4), \\ (4, 0),\ (4, 1),\ (4, 2),\ (4, 3),\ (4, 4). \end{array}$$

*) Слова «упорядоченная пара» означают, что пары (a, b) и (b, a) считаются различными. — *Прим. ред.*

Заканчивая введение, вспомним, что если действительное число p меньше или равно q, мы пишем $p \leqslant q$, и что для любых действительных чисел p, q, r справедливы следующие утверждения: (i) $p \leqslant p$; (ii) если $p \leqslant q$ и $q \leqslant p$, то $p = q$; (iii) если $p \leqslant q$ и $q \leqslant r$, то $p \leqslant r$. Отношение $\leqslant$ на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел в соответствии с ранее сказанным мы можем рассматривать как множество, элементами которого являются упорядоченные пары (p, q) действительных чисел такие, для которых разность $q - p$ неотрицательна.

Глава 1

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Заметим, что отношение δ на множестве $\boldsymbol{N}_4$, определенное на стр. 9, имеет некоторые общие свойства с отношением $\leqslant$ на $\boldsymbol{R}$, именно,

$m\delta m$	$m \mid m$
для любого $m \in \boldsymbol{N}_4$; если $m\delta n$ и $n\delta m$, то $m = n$; если $m\delta n$ и $n\delta k$, то $m\delta k$.	для любого $m \in \boldsymbol{N}_4$; если $m \mid n$ и $n \mid m$, то $m = n$; если $m \mid n$ и $n \mid k$, то $m \mid k$.

Напомним названия основных свойств отношений. Пусть ρ — отношение на множестве A, т. е. $\rho \subset A^2$.

Отношение ρ называется *рефлексивным*, если

$(a, a) \in \rho$	$a\rho a$
для любого $a \in A$.	для любого $a \in A$.

(Для удобства читателей мы приводим определения в обеих принятых нами записях.)

Отношение ρ по определению *антисимметрично* тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством:

если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$, то $a = b$.	если $a\rho b$ и $b\rho a$, то $a = b$.

Отношение ρ называется *транзитивным* тогда и только тогда, когда выполняется условие:

если $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho$, то $(a, c) \in \rho$.	если $a\rho b$ и $b\rho c$, то $a\rho c$.

Наконец, отношение ρ называется *симметричным* тогда и только тогда, когда для него выполняется условие:

если $(a, b) \in \rho$, то $(b, a) \in \rho$. ‖ если $a\rho b$, то $b\rho a$.

Пример 2. Для двух действительных чисел a, b будем писать $a\sigma b$ тогда и только тогда, когда $a:(a^2+1) \leqslant b:(b^2+1)$. Нужно исследовать свойства так определенного на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел отношения.

Решение. Отношение σ рефлексивно, поскольку для любого действительного числа a частное $a:(a^2+1)$ определено и, конечно, $a:(a^2+1) \leqslant a:(a^2+1)$. Это отношение не является антисимметричным, так как $1/2\sigma 2$ и одновременно $2\sigma 1/2$, но $1/2 \neq 2$. Однако оно принадлежит к числу транзитивных отношений, поскольку из неравенств $a:(a^2+1) \leqslant b:(b^2+1)$ и $b:(b^2+1) \leqslant c:(c^2+1)$ вытекает, что $a:(a^2+1) \leqslant c:(c^2+1)$. Наконец, из того, что $0\sigma 1$, но пара $(1, 0)$ не принадлежит отношению σ, заключаем, что рассматриваемое отношение симметричным не будет.

Для непустого множества P, на котором определено отношение ρ, являющееся рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, введем специальное название. Точная формулировка выглядит следующим образом. Если $\mathscr{P}$ обозначает упорядоченную пару (P, ρ), где P — непустое множество, а ρ — отношение, которое обладает указанными тремя свойствами, то будем говорить, что $\mathscr{P}$ является *упорядоченным множеством**). Иногда будем употреблять сокращенную запись: $\mathscr{P}$ есть *у. м.* Множество P называется *носителем* у. м. $\mathscr{P}$, а отношение ρ — *упорядочением* множества P; элементы множества P считаются *элементами упорядоченного множества* $\mathscr{P}$. Для обозначения упорядочения на произвольном множестве иногда употребляют символ $\ll$ (запись $a \ll b$ читается «a предшествует b» или «b следует за a») или используют (если нет опасности непонимания) знак $\leqslant$ (запись $a \leqslant b$ читается «a меньше или равно b» или

*) В научной литературе в этом случае чаще говорят о *частично упорядоченном множестве*, ибо некоторые элементы a и b могут оказаться не сравнимыми, т. е такими, что ни (a, b), ни (b, a) не лежит в ρ. В примере на с. 9 такими будут, скажем, числа 2 и 3. — *Прим. ред.*

так же, как запись $a \ll b$). Выражение $a \gg b$ считается равносильным выражению $b \leqslant a$.

Пример 3. Возьмем в качестве множества P открытый интервал $(1, \infty)$ и для двух действительных чисел p, q будем писать $p \ll q$ тогда и только тогда, когда $p\sigma q$, имея в виду σ, определенное в примере 2. Доказать, что отношение $\ll$ является упорядочением множества $(1, \infty)$.

Решение. Вследствие рассуждений, проведенных в примере 2, достаточно установить антисимметричность отношения $\ll$. Пусть a, b — два числа из интервала $(1, \infty)$ такие, что $a \ll b$ и одновременно $b \ll a$. Тогда из $a:(a^2+1) \leqslant b:(b^2+1) \leqslant a:(a^2+1)$, конечно, следует, что $a:(a^2+1) = b:(b^2+1)$. Отсюда вытекает сначала равенство

$$ab^2 + a = ba^2 + b,$$

а затем

$$ab^2 - ba^2 = b - a,$$

что эквивалентно условию

$$ab(b-a) = b - a.$$

Читатель, имевший дело с равенствами, содержащими параметр, хорошо знает, что без дополнительных рассуждений в подобных ситуациях нельзя поддаваться желанию сократить равенство на число $b - a$. Как же тогда поступить? Наш опыт подсказывает, что нужно рассмотреть две возможности: $b - a \neq 0$ или $b - a = 0$. Если $b - a \neq 0$, то обе части равенства можно разделить на ненулевое число $b - a$, и тогда получается $ab = 1$, что для наших чисел a, b, очевидно, невозможно (ведь $a > 1$ и $b > 1$). Тогда единственной возможностью остается случай $b - a = 0$. Значит, $a = b$, и мы доказали, что $\ll$ является на $(1, \infty)$ антисимметричным отношением.

Пример 4. Для двух действительных чисел a, $b > 1$ будем писать $a\tau b$ тогда и только тогда, когда оба числа $\pi a:(a^2+1)$, $\pi b:(b^2+1)$ принадлежат области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ и при этом имеет место неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{\pi a}{a^2+1} \leqslant \operatorname{tg} \frac{\pi b}{b^2+1}.$$

Требуется найти такие подмножества M множества $(1, \infty)$, на которых так определенное отношение является упорядоченностью.

Решение. Прежде всего, M должно быть непустым подмножеством множества $(1, \infty)$. Отношение τ, очевидно, при любом допустимом выборе M является рефлексивным и транзитивным. Теперь на время отвлечемся от исследования отношения τ. Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее вспомогательное предложение:

(3) *Для любого действительного числа x выполняются неравенства*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2},$$

причем левое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = -1$, а правое — тогда и только тогда, когда $x = 1$.

Доказательство. Поскольку $0 \leqslant (x-1)^2$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$ (и равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x = 1$), то $2x \leqslant x^2 + 1$, откуда $x : (x^2+1) \leqslant 1/2$ (и равенство имеет место только при $x = 1$). Положив $x = -z$, мы получим из доказанного, что для любого $z \in \boldsymbol{R}$ справедливо

$$-\frac{z}{z^2+1} \leqslant \frac{1}{2},$$

причем равенство возможно лишь в случае $x = -z = 1$, так что для любого $z \in \boldsymbol{R}$ будет

$$\frac{z}{z^2+1} \geqslant -\frac{1}{2}$$

и равенство достигается лишь при $z = -1$. Этим завершается доказательство истинности левого неравенства. Читателю в качестве упражнения предлагается вывести это неравенство непосредственно из неравенства $0 \leqslant (x+1)^2$.

Вернемся к исследованию отношения τ. Из (3) видно, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi a}{a^2+1} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

т. е. что $\pi a : (a^2+1)$ принадлежит области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ тогда и только тогда, когда $a \neq \pm 1$.

Теперь легко установить, что отношение τ на каждом подмножестве M множества $(1, \infty)$ необходимо анти-

симметрично. Действительно, если $a\tau b$ и одновременно $b\tau a$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\pi a}{a^2+1}=\operatorname{tg}\frac{\pi b}{b^2+1},$$

а так как вследствие (3) и выбора M числа $\pi a:(a^2+1)$ и $\pi b:(b^2+1)$ принадлежат интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$, мы получаем $\pi a:(a^2+1)=\pi b:(b^2+1)$, что, как было показано в решении примера 3, влечет равенство $a=b$.

Условию, поставленному в примере 4, таким образом, удовлетворяет любое непустое подмножество множества $(1, \infty)$.

Задача 1. На множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел определим отношение σ_1 так, что $(a, b)\in\sigma_1$ тогда и только тогда, когда $a\,|\,b$. Докажите, что отношение σ_1 является упорядочением множества N_0.

Задача 2. Пусть E — некоторое произвольное множество. Положим $(M, N)\in\sigma_2$ тогда и только тогда, когда $M\subset N$ и $N\subset E$. Докажите, что отношение σ_2 является упорядочением множества всех подмножеств множества E.

Задача 3. Отношение σ_3 на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определим так, что $(a, b)\in\sigma_3$ для двух действительных чисел a, b тогда и только тогда, когда $a\leqslant 1$ или $b\geqslant -1$. Будет ли σ_3 отношением:

a) рефлексивным, b) антисимметричным, c) транзитивным, d) симметричным?

[a) да, b) — d) нет.]

Задача 4. Исследуйте, будет ли отношение σ, введенное для действительных чисел в примере 2, определять упорядочение на множестве:

a) $[1, \infty)$; b) $(-1, 1)$; c) $[-1, 1]$; d) $(-\infty, -1]$; e) $(-\infty, 0)$.

[a) — d) да, e) нет.]

Задача 5. Докажите, то выражение $a\sigma b$ в случаях b), c) из задачи 4 эквивалентно неравенству $a\leqslant b$, а в случаях a), d) — неравенству $a\geqslant b$.

Пример 5. Для двух действительных чисел a, b пусть $a\sigma_4 b$ означает, что

$$\lg\left[(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+1}\,\right]\geqslant 0.$$

Нужно доказать, что $a\sigma_4 b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a\geqslant b$.

Решение. Поскольку для каждого действительного числа x будет $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, то $x+\sqrt{x^2+1} > x+|x| \geqslant 0$, и поэтому выражение $\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ определено для любого действительного числа x. Если $x>0$, то $x+\sqrt{x^2+1} > x+1 > 1$, откуда $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) > \lg 1 = 0$. Если $x<0$, положим $x=-z$. Из уже доказанного следует, что $0 < \lg(z+\sqrt{z^2+1}) = \lg(-x+\sqrt{x^2+1})$. Но ведь $\lg(-x+\sqrt{x^2+1})+\lg(x+\sqrt{x^2+1}) = \lg[(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})] = \lg 1 = 0$, и поэтому $0 < \lg(-x+\sqrt{x^2+1}) = -\lg(x+\sqrt{x^2+1})$. Отсюда (при исходном предположении $x<0$) будет $0 > \lg(x+\sqrt{x^2+1})$. Таким образом, мы доказали (случай $x=0$ тривиален):

(i) Если $x>0$, то $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) > 0$;

(ii) Если $x<0$, то $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) < 0$;

(iii) Если $x=0$, то $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) = 0$.

Предположим теперь, что число t таково, что $\lg(t+\sqrt{t^2+1}) > 0$. Из (ii) видно, что не может быть $t<0$, а из (iii) заключаем, что невозможно и $t=0$. Остается единственная возможность $t>0$. Отсюда (и из аналогичных рассуждений в случаях (ii) и (iii)) вытекают следующие усиления предложений (i)—(iii):

(i′) $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) > 0$ тогда и только тогда, когда $x>0$;

(ii′) $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) < 0$ тогда и только тогда, когда $x<0$;

(iii′) $\lg(x+\sqrt{x^2+1}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Теперь ясно, что

$$\lg[(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+1}] \geqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $a-b \geqslant 0$, т. е. в том и только том случае, если $a \geqslant b$.

Решив задачу 2, мы увидим, что отношение включения является упорядочением множества $P(E)$ всех подмножеств множества E или, другими словами, что упорядоченная пара $(P(E), \subset)$ представляет собой упорядоченное множество. Попробуем наглядно представить подобные упорядоченные множества, по крайней мере

в простейших случаях, при помощи подходящих диаграмм. Для этого заключим следующее соглашение. Если $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ — упорядоченное множество, которое имеет конечное число элементов, и если для двух его

Рис. 1.

Рис. 2.

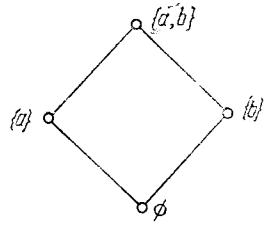


Рис. 3.

элементов a, b имеет место соотношение $a \leqslant b$, изобразим оба элемента кружками, причем a расположим под b и соединим их отрезком. Чтобы упростить диаграмму, это соединение будем производить лишь в том случае, когда $a \neq b$ и между a и b нет ни одного другого элемента упорядоченного множества, т. е. когда $a \neq b$ и когда из того, что $z \in P$ и $a \leqslant z \leqslant b$, следует, что $a = z$ или $z = b$. В этом случае говорят, что b *покрывает* a.

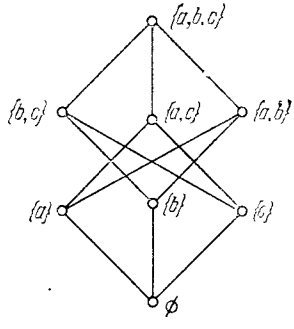


Рис. 4.

Для $E = \varnothing$ диаграмма изображена на рис. 1, для $E = \{a\}$ см. рис. 2, для $E = \{a, b\}$ см. рис. 3, диаграмма для случая $E = \{a, b, c\}$ представлена на рис. 4.

Задача 6. Пусть π — некоторая плоскость, V — произвольно выбранная точка на ней. Для двух точек A, B на π будем писать $(A, B) \in \sigma_5$ в том и только том случае, когда отрезки VA, VB имеют одинаковую длину. Получаем отношение σ_5 на множестве всех точек плоскости π. Исследуйте его.

[Отношение σ_5 рефлексивно, симметрично и транзитивно, но оно не антисимметрично.]

Задача 7. Исследуйте отношение $|$ («делит») на множестве $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел.

[Оно рефлексивно, транзитивно, но не является ни симметричным, ни антисимметричным.]

Отношения σ_5 и $\mid$ оба рефлексивны и транзитивны. Отношение ρ на непустом множестве M, являющееся рефлексивным и транзитивным, называется *квазиупорядочением* множества M. Отношение ρ на непустом множестве M, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *эквивалентностью* на множестве M.

Упражнения

1. Найдите все отношения на двухэлементном множестве $\{a, b\}$.
2. Среди отношений из упр. 1 укажите
   a) все рефлексивные;
   b) все симметричные;
   c) все антисимметричные;
   d) все транзитивные.
3. Постройте пример отношения, которое было бы симметричным и транзитивным, но не рефлексивным.
4. Среди отношений из упр. 1 выделите
   a) все квазиупорядочения;
   b) все упорядочения;
   c) все эквивалентности.
5. Найдите все эквивалентности
   a) на трехэлементном множестве $\{a, b, c\}$;
   b) на четырехэлементном множестве $\{a, b, c, d\}$.

Глава 2

РЕШЕТКИ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

В дальнейшем нам потребуются понятия точной верхней и точной нижней граней подмножеств носителя некоторого у. м.

Будем говорить, что непустое подмножество M носителя P у. м. $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ имеет в $\mathscr{P}$

точную нижнюю грань тогда и только тогда, когда существует элемент i, который имеет следующие три свойства:

(1i) $\quad i \in P$;

(2i) $\quad i \leqslant m$

для любого $m \in M$;

(3i) если для некоторого элемента i_1 множества P неравенство $i_1 \leqslant m$ ис-

точную верхнюю грань тогда и только тогда, когда существует элемент s, который имеет следующие три свойства:

(1s) $\quad s \in P$;

(2s) $\quad m \leqslant s$

для любого $m \in M$;

(3s) если для некоторого элемента s_1 множества P неравенство $s_1 \geqslant m$ ис-

тинно при любом выборе m из M, то необходимо $i_1 \leqslant i$. Элемент i называется *точной нижней гранью* множества M в у. м. $\mathscr{P}$.

Будем писать

$$i = \inf_{\mathscr{P}} M$$

тогда и только тогда, когда существует точная нижняя грань множества M в у. м. $\mathscr{P}$ и она равна i.

тинно при любом выборе m из M, то необходимо $s_1 \geqslant s$. Элемент s называется *точной верхней гранью* множества M в у. м. $\mathscr{P}$.

Будем писать

$$s = \sup_{\mathscr{P}} M$$

тогда и только тогда, когда существует точная верхняя грань множества M в у. м. $\mathscr{P}$ и она равна s.

Символ inf читается «инфимум», а символ sup — «супремум».

К только что введенным определениям сделаем два замечания. Прежде всего, для любого множества M, $\varnothing \neq M \subset P$, существует не более одной точной нижней грани и не более одной точной верхней грани. В самом деле, если для элемента I также выполняются условия (1i)—(3i), то из (2i) и (3i) следует, что $i_1 = I \leqslant i$, а с другой стороны, те же требования (2i) и (3i), рассматриваемые для I, влекут неравенство $i \leqslant I$. Поскольку отношение $\leqslant$ антисимметрично, будет $i = I$. Подобные рассуждения можно провести и для точной верхней грани. Далее отметим, что элемент $d \in P$ такой, что $d \leqslant m$ для любого $m \in M$, принято называть *нижней гранью* множества M в у. м. $\mathscr{P}$. Аналогично элемент $h \in P$ такой, что $h \geqslant m$ для любого m из множества M, называют *верхней гранью* множества M в у. м. $\mathscr{P}$. Учитывая это, условия (2i) и (3i) можно кратко сформулировать следующим образом: от элемента i требуется, чтобы он был нижней гранью множества M (см. (2i)) и чтобы он был наибольшей нижней гранью этого множества (см. (3i)). Аналогично и условия (2s) и (3s) можно представить в сокращенном виде, потребовав, чтобы элемент s был наименьшей верхней гранью множества M в $\mathscr{P}$.

Пример 6. Пусть $E = \{a, b\}$ и пусть $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ есть упорядоченное множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества E, а в качестве упорядочения выступает включение. Обозначим $M_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$, т. е. M_2 есть двухэлементное множество

с элементами $\{a\}$, $\{b\}$ (которые являются одноэлементными множествами). Требуется установить, существуют ли точные грани множества M_2 в у. м. $\mathscr{P}(E)$, и полученный результат обобщить.

Решение. Предположим, что точная верхняя грань множества M_2 в $\mathscr{P}(E)$ существует, и обозначим ее через S. Согласно (1s) имеем $S \subset E$. Вследствие (2s) должно быть $\{a\} \subset S$ и одновременно $\{b\} \subset S$, причем из (3s) вытекает, что S есть наименьшее множество с такими свойствами. Отсюда заключаем, что $S = \{a, b\}$. Аналогичные рассуждения показывают, что точной нижней гранью множества M_2 будет пустое множество $\varnothing$. Очевидно, что $\{a, b\}$ является объединением множеств $\{a\}$, $\{b\}$, а $\varnothing$ — пересечением множеств $\{a\}$, $\{b\}$.

Полученный результат приводит нас к следующему предположению: если E — некоторое множество и M, N — два его подмножества, то

$$\sup_{(P(E), \subset)} \{M, N\} = M \cup N,$$

$$\inf_{(P(E), \subset)} \{M, N\} = M \cap N.$$

Это предположение будет доказано, если мы установим, что $M \cup N$ (соответственно $M \cap N$) удовлетворяет условиям (1s)—(3s) (соответственно (1i)—(3i)). Проведем рассуждения для $M \cup N$. Поскольку $M \cup N \subset E$, требование (1s) выполнено. Так как $M \subset M \cup N$ и $N \subset M \cup N$, то истинно (2s). Если теперь H — подмножество множества E такое, что $M \subset H$ и $N \subset H$, то $M \cup N \subset H$, откуда и следует справедливость (3s).

Задача 8. Докажите, что для каждого одноэлементного подмножества $\{a\}$ множества P в любом у. м. $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ существуют $\sup_{\mathscr{P}}\{a\}$ и $\inf_{\mathscr{P}}\{a\}$.

[В обоих случаях это будет элемент a.]

Пример 7. Пусть a, b — два натуральных числа. Требуется установить существование нижней и верхней точных граней множества $\{a, b\}$ в упорядоченном множестве (N_0, σ_1) из задачи 1.

Решение. Обозначим через n (соответственно через d) наименьшее общее кратное (соответственно наибольший общий делитель) чисел a, b. Мы утверждаем, что

$$n = \sup_{(N_0, \sigma_1)} \{a, b\}, \quad d = \inf_{(N_0, \sigma_1)} \{a, b\}.$$

Докажем первое равенство, а второе оставим читателю в качестве упражнения. Прежде всего заметим, что (1s) выполняется, поскольку для двух натуральных чисел всегда существует натуральное число, являющееся их наименьшим общим кратным. Далее, (2s) истинно, поскольку $a \mid n$ и также $b \mid n$. Наконец, и (3s) имеет место, так как если натуральное число s_1 таково, что $a \mid s_1$ и $b \mid s_1$, то s_1 является общим кратным чисел a и b, и значит, $n \mid s_1$.

Задача 9. Докажите, что нижняя и верхняя точные грани в (N_0, σ_1) существуют для любого двухэлементного множества $\{a, b\}$, где a, b — целые неотрицательные числа.

[Обратите внимание на то, что $\sup_{(N_0, \sigma_1)} \{0, a\} = 0$, $\inf_{(N_0, \sigma_1)} \{0, a\} = a$.]

Множество $\boldsymbol{Z}$ не имеет в упорядоченном множестве $(\boldsymbol{Z}, \leqslant)$ ни точной нижней, ни точной верхней граней, поскольку в $\boldsymbol{Z}$ не существует ни наибольшего, ни наименьшего числа. Не так легко убедиться, что верхняя или нижняя точная грань не существует в некоторых других ситуациях. Одна из них будет рассмотрена в нижеследующем примере. При первом чтении мы рекомендуем разобрать этот пример лишь в общих чертах, чтобы впоследствии вернуться к нему для более детального изучения.

Пример 8. Пусть D обозначает множество тех положительных рациональных чисел q, для которых $q^2 > 2$. Нужно доказать, что в упорядоченном множестве $(\boldsymbol{Q}, \leqslant)$, где $\boldsymbol{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел, множество D не имеет точной нижней грани.

Решение. Прежде всего докажем, что (i) *для любого элемента q, принадлежащего D, существует элемент q_1, принадлежащий D, такой, что $q_1 < q$.* Для этого предположим, что элемент q_1 можно представить в виде $q_1 = q - \varepsilon$, где ε — подходящее «малое» положительное рациональное число. Элемент q_1 должен принадлежать D, и значит, должно быть истинным соотношение $2 < (q - \varepsilon)^2$, которое легко преобразуется к виду $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < q^2 - 2$. Мы потребовали выполнения этого условия для подходящего положительного рационального числа ε. Поэтому попытаемся получить более простое условие, в которое не входило бы ε^2. Это можно сделать следующим образом: если выбрать $\varepsilon > 0$

так, чтобы было $2\varepsilon q < q^2 - 2$, то — так как $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < 2\varepsilon q$ — будет выполняться и исходное соотношение для ε. Следующий шаг теперь очевиден: положим $\varepsilon = (q^2 - 2):(2q)$*). Это положительное рациональное число (проверьте), так как q по предположению рационально. Тогда число $q_1 = q - \varepsilon = (q^2 + 2):(2q)$ принадлежит D, поскольку, проводя ниже рассуждение в обратном порядке, мы получаем

$$q_1^2 = (q - \varepsilon)^2 = q^2 - 2q\varepsilon + \varepsilon^2 =$$
$$= q^2 - (q^2 - 2) + \varepsilon^2 = 2 + \varepsilon^2 > 2.$$

Далее покажем, что (ii) *если* $d \geqslant 1$ *— рациональное число и* $d^2 < 2$, *то существует рациональное число* d_1 *такое, что* $d < d_1$ *и* $d_1^2 < 2$. Для доказательства этого утверждения заметим, что $2 < (d + 1)^2$, ибо $d \geqslant 1$ влечет за собой $2 < 4 \leqslant (d + 1)^2$, откуда $0 < 2 - d^2 < 2d + 1$. Поэтому, положив $\varepsilon_1 = (2 - d^2):(2d + 1)$, получим $0 < \varepsilon_1 < 1$. Отсюда $\varepsilon_1^2 < \varepsilon_1$, и, следовательно, $2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < 2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = (2d + 1)\varepsilon_1 = 2 - d^2$. Вследствие этого для $d_1 = d + \varepsilon_1$ получаем $d_1^2 = (d + \varepsilon_1)^2 < 2$. (Читателю, который впервые знакомится с подобными рассуждениями, нужно внимательно разобрать приведенное доказательство утверждения (ii), чтобы увидеть, каким образом (вспомним и доказательство утверждения (i)) мы так удачно выбрали выражение для ε_1.)

Докажем, наконец, что (iii) *предположение о наличии точной нижней грани множества* D *в* $(\boldsymbol{Q}, \leqslant)$ *ведет к противоречию.* В самом деле, если бы d был элементом со свойствами (1i)—(3i), то, поскольку $q > 1$ для любого элемента $q \in D$, было бы необходимо $d \geqslant 1$. Если бы имело место неравенство $d^2 > 2$, то элемент d принадлежал бы D и согласно (i) существовал бы элемент $q_1 \in D$ такой, что $q_1 < d$, а это противоречит (2i). Если, далее, допустить, что $d^2 = 2$, то $d = \sqrt{2}$, причем d должно быть рациональным числом. Это противоречит хорошо известному факту — иррациональности числа $\sqrt{2}$. Остается случай $d^2 < 2$. Но согласно (ii) существует элемент d_1 такой, что $d < d_1$ и $d_1^2 < 2$, откуда сразу $d_1^2 < q^2$ для $q \in D$, и значит, $d_1 < q$ для любого $q \in D$.

*) Заметим, что все предыдущие рассуждения имели наводящий характер. Формальное доказательство можно начинать с этой фразы. — *Прим. ред.*

Число d_1 в этом случае тоже было бы рациональной нижней гранью множества D и притом бо́льшей, чем наибольшая нижняя грань этого множества. Это противоречит (3i). Предположение о том, что множество D имеет точную нижнюю грань в $(\boldsymbol{Q}, \leqslant)$, во всех случаях приводило к противоречию, поэтому указанная точная нижняя грань не существует.

Отметим, что в множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел $\inf_{(R, \leqslant)} D$ существует и он равен $\sqrt{2}$.

Задача 10. Докажите следующие утверждения:

a) не существует такого рационального числа s/t, где $s, t \in \boldsymbol{Z}$, чтобы

$$10^{s/t} = 2;$$

b) для любого натурального числа n имеет место неравенство

$$0 < 10^{1/n} - 1 \leqslant \frac{9}{n};$$

c) если число q таково, что $10^q > 2$, то для любого натурального числа $n > 18 : (10^q - 2)$ будет $2 : 10^q < 10^{-1/n} < 1$;

d) если рациональное число d таково, что $10^d < 2$, то существует такое рациональное число q_1, что $q_1 < q$ и одновременно $10^{q_1} > 2$;

e) если рациональное число d таково, что $10^d < 2$, то существует такое рациональное число d_1, что $d < d_1$ и при этом $10^{d_1} < 2$;

f) пусть E — множество, элементами которого являются в точности те рациональные числа q, для которых $10^q > 2$. Тогда в у. м. $(\boldsymbol{Q}, \leqslant)$ не существует точной нижней грани множества E;

g) $\inf_{(R, \leqslant)} E = \lg 2$.

[Указания. a) Рассмотрите соотношение $5^s = 2^{t-s}$, где s, t принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел. b) Примените формулу бинома к $\left(1 + \frac{9}{n}\right)^n$. c) Покажите, что $\frac{10^q}{2} - 1 > \frac{9}{n}$. d) Положите $q_1 = q - \frac{1}{n}$, где $n > 18 : (10^q - 2)$. e) Положите $d_1 = d + \frac{1}{m}$, где $m > 9 \cdot 10^d : (2 - 10^d)$, и докажите, что в этом случае $10^{1/m} \leqslant 1 + (9 : m) < 2 \cdot 10^{-d}$.]

Введем понятие наибольшего (наименьшего) элемента упорядоченного множества. Будем говорить, что

элемент $i \in P$ является *наибольшим элементом* у. м. $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in P$ имеет место $p \leqslant i$. Наибольший элемент у. м. $\mathscr{P}$ иногда называют *единичным элементом* у. м. $\mathscr{P}$ и обозначают, как правило, символом 1.

элемент $\omega \in P$ является *наименьшим элементом* у. м. $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in P$ имеет место $p \geqslant \omega$. Наименьший элемент у. м. $\mathscr{P}$ иногда называют *нулевым элементом* у. м. $\mathscr{P}$ и обозначают, как правило, символом 0.

Задача 11. Выясните, существует ли нулевой или единичный элемент: a) в у. м. $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$, b) в у. м. $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ (см. задачу 1).

[a) существует нулевой элемент и не существует единичный; b) существуют и нулевой и единичный элементы.]

Если для любых двух различных элементов a, b упорядоченного множества $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ существуют как $\sup_{\mathscr{P}}\{a, b\}$, так и $\inf_{\mathscr{P}}\{a, b\}$, то $\mathscr{P}$ называется *решеткой* *). Если для любого непустого подмножества M носителя P у. м. $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ существуют как $\sup_{\mathscr{P}} M$, так и $\inf_{\mathscr{P}} M$, то $\mathscr{P}$ называется *полной решеткой*.

Приведенные определения показывают, что каждая полная решетка является решеткой. Из результата примера 6 вытекает, что упорядоченное множество $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ является решеткой. В задаче 9 упорядоченное множество $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ также является решеткой. Из примечания к этой задаче заключаем, что у. м. $(\boldsymbol{Z}, \leqslant)$ не является полной решеткой. Однако решеткой оно будет, что легче всего вывести из следующих общих рассуждений.

Пусть $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ есть некоторое упорядоченное множество и для двух его элементов a, b пусть будет $a \leqslant b$. В этом случае условимся писать

$$\max_{\mathscr{P}}(a, b) = b, \quad \min_{\mathscr{P}}(a, b) = a$$

*) Употребляется также термин *структура*, используемый также и в совершенно другом смысле. — *Прим. ред.*

и эти записи читать следующим образом: «максимум (соответственно минимум) элементов a, b равняется b (соответственно a)». *Цепью* называется упорядоченное множество $(R, \leqslant)$, в котором для любых двух элементов r, s будет $r \leqslant s$ или $s \leqslant r$. Из уже знакомых нам у. м. $(N, \leqslant)$, $(Z, \leqslant)$, $(Q, \leqslant)$, $(R, \leqslant)$ являются цепями, а у. м. (N_0, σ_1) цепью не будет, поскольку в нем, например, не выполняется ни $2\sigma_1 3$, ни $3\sigma_1 2$.

Пример 9. Пусть $\mathcal{P} = (P, \leqslant)$ есть у. м., и для двух его элементов a, b пусть имеет место неравенство $a \leqslant b$. Нужно доказать, что

$$\inf_{\mathcal{P}} \{a, b\} = \min_{\mathcal{P}} (a, b)$$

и

$$\sup_{\mathcal{P}} \{a, b\} = \max_{\mathcal{P}} (a, b).$$

Решение. Приведем доказательство только первого соотношения, а проверку второго предоставим читателю. Прежде всего $a = \min_{\mathcal{P}} (a, b)$, и остается доказать, что элемент a имеет свойства точной нижней грани множества $\{a, b\}$. Истинность (1i) очевидна. Поскольку отношение $\leqslant$ рефлексивно, будет $a \leqslant a$, а по предположению $a \leqslant b$, так что выполняется (2i). Если $a_1 \in P$ является нижней гранью множества $\{a, b\}$, то, конечно, $a_1 \leqslant a$ и, значит, справедливо (3i).

Теорема 1. *Каждая цепь является решеткой.*

Доказательство. Поскольку для любых двух элементов a, b цепи истинно $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, то согласно примеру 9 для любого двухэлементного подмножества из носителя цепи существуют как нижняя, так и верхняя точные грани. Поэтому цепь является решеткой.

Из теоремы 1 следует, что у. м. $(N, \leqslant)$, $(Z, \leqslant)$, $(Q, \leqslant)$, $(R, \leqslant)$ являются решетками. Точно так же решетками будут у. м. $(D, \leqslant)$ из примера 8 и у. м. $(E, \leqslant)$ из задачи 10. Однако ни одна из этих решеток не будет полной, поскольку их носители не имеют точной нижней грани.

Следующее предложение помогает сравнительно просто распознавать, будет ли данное у. м. полной решеткой.

Теорема 2. *У. м. $\mathcal{P} = (P, \leqslant)$ является полной решеткой тогда и только тогда, когда для любого непустого множества $M \subset P$ существует $\inf_{\mathcal{P}} M$ и у. м. $\mathcal{P}$ имеет наибольший элемент.*

Доказательство. 1) Предположим, что выполнено условие теоремы. Прежде всего докажем, что для любого непустого подмножества $M \subset P$ существует $\sup_{\mathscr{P}} M$. Обозначим через H множество тех элементов $h \in P$, для которых при любом выборе $m \in M$ будет $m \leqslant h$ (таким образом, H состоит из всевозможных верхних граней множества M). Множество H не пусто, поскольку наибольший элемент у. м. $\mathscr{P}$, очевидно, принадлежит H. По предположению, существует $\inf_{\mathscr{P}} H$, который обозначим через i_0. Если выберем $m \in M$, то $m \leqslant h$ выполняется для любого $h \in H$. Тогда, согласно (3i), получаем $m \leqslant i_0$. Так что элемент $i_0 \in P$ обладает свойствами (1s) и (2s). Покажем, что он имеет и свойство (3s). Действительно, если $m \leqslant i_1$ для любого $m \in M$, то $i_1 \in H$, а поскольку i_0 является точной нижней гранью множества H, свойство (2i) влечет неравенство $i_0 \leqslant i_1$, что и означает истинность (3s). Итак, мы доказали, что $i_0 = \sup_{\mathscr{P}} M$.

2) Если $\mathscr{P}$ — полная решетка, то непосредственно из определения следует существование упомянутых в условии точных нижних граней. Поэтому же существует $i = \sup_{\mathscr{P}} P$, а поскольку в следствие (2s) этот элемент таков, что $p \leqslant i$ для любого $p \in P$, мы видим, что $\mathscr{P}$ имеет наибольший элемент.

Пример 10. Показать, что у. м. $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ из примера 6 является полной решеткой.

Решение. Для решения используем теорему 2. Наибольшим элементом у. м. $\mathscr{P}(E)$ является, очевидно, E. Если M — непустое множество подмножеств A, B, ... множества E, то $I = \inf_{\mathscr{P}(E)} M$ должно быть подмножеством множества E, содержащимся во всех подмножествах A, B, ... (этого требует условие (2i)), и если при этом подмножество I_1 множества E содержится во всех подмножествах A, B, ..., то I_1 должно быть подмножеством множества I (этого требует условие (3i)). Этим требованиям, очевидно, удовлетворяет множество, элементами которого являются те и только те элементы множества E, которые принадлежат всем подмножествам A, B, ..., т. е. *пересечение* всех этих подмножеств.

Пример 11. Пусть $E(N)$ обозначает множество всех эквивалентностей на множестве $N \neq \varnothing$. Требуется доказать, что упорядоченное множество $(E(N), \subset)$ является полной решеткой.

Р е ш е н и е. Убедимся, что выполняются условия теоремы 2. Наибольшим элементом является такая эквивалентность ρ_0, что $n_1\rho_0 n_2$ для любых двух элементов n_1, $n_2 \in N$ (т. е. $\rho_0 = N \times N$). Если M — непустое множество эквивалентностей ρ, σ, ... на множестве N, то существует $\inf_{(E(N),\subset)} M$. Действительно, определим отношение τ на N так, что $n_1\tau n_2$ тогда и только тогда, когда для любых эквивалентностей ρ, σ, ... из M истинно $n_1\rho n_2$, $n_1\sigma n_2$, ...*). Легко заметить, что τ будет эквивалентностью. Например, транзитивность отношения τ проверяется так: если $n_1\tau n_2$ и $n_2\tau n_3$, то для всех отношений ρ, σ, ... одновременно $n_1\rho n_2$, $n_2\rho n_3$, $n_1\sigma n_2$, $n_2\sigma n_3$, ... а поскольку ρ, σ, ... — транзитивные отношения, то $n_1\rho n_3$, $n_1\sigma n_3$, ..., откуда и следует $n_1\tau n_3$. Условие (2i) для τ перепишется следующим образом: должно $\tau \subset \rho$, $\tau \subset \sigma$, ... Но что означает, например, включение $\tau \subset \rho$? Оно означает, что из соотношения $(n_1, n_2) \in \tau$ всегда следует соотношение $(n_1, n_2) \in \rho$. В другой записи: $n_1\tau n_2$ влечет $n_1\rho n_2$, но это сразу следует из определения τ. Перепишем теперь условие (3i): если одновременно $\tau_1 \subset \rho$, $\tau_1 \subset \sigma$, ..., то должно быть $\tau_1 \subset \tau$. Выберем n_3, $n_4 \in N$ так, чтобы $(n_3, n_4) \in \tau_1$. Нужно доказать, что необходимо $(n_3, n_4) \in \tau$. Но из соотношений $(n_3, n_4) \in \tau$ и $\tau_1 \subset \rho$ следует, что $(n_3, n_4) \in \rho$, т. е. $n_3\rho n_4$, и аналогично получим, что $n_3\sigma n_4$, ..., т. е. $n_3\tau n_4$. Итак, мы доказали, что τ является точной нижней гранью множества M в у. м. $(E(N), \subset)$**).

Упражнения

1. Начертите диаграмму у. м. (N_4 δ) (см. стр. 9).

2. Используя результат упражнения 1 из главы 1, постройте диаграмму у. м., носителем которого является множество всех отношений на двухэлементном множестве $\{a, b\}$, а упорядочением — включение.

3. Докажите, что всевозможные отношения на множестве M, будучи упорядочены включением, образуют полную решетку.

4. Установите, будут ли при упорядочении включением образовывать полную решетку

---

*) Другими словами, τ определяется как пересечение всех эквивалентностей из M, рассматриваемых как подмножества множества $N \times N$. — *Прим. ред.*

**) Интересно заметить, что $\sup_{(E(N),\subset)} M$, хотя и существует, но не совпадает с объединением эквивалентностей из M, рассматриваемых как подмножества множества $N \times N$. Покажите это на примерах. — *Прим. ред.*

a) все рефлексивные;
b) все симметричные;
c) все антисимметричные;
d) все транзитивные

отношения на данном множестве M.

5. Выясните, будут ли
a) все квазиупорядочения;
b) все упорядочения

на данном множестве образовывать при упорядочении включением полную решетку.

6. Используя результаты упражнения 5 из первой главы, постройте диаграмму решетки $(E(N), \subset)$ в случае, когда
a) $N = \{a, b, c\}$;
b) $N = \{a, b, c, d\}$.

7. Пусть I обозначает множество всех рациональных чисел из замкнутого интервала $[1, 2]$. У. м. $(I, \leqslant)$ не является полной решеткой. Докажите.

Глава 3

ПРИМЕРЫ РЕШЕТОК

В этой главе мы пополним основные сведения о решетках и рассмотрим некоторые примеры, которые можно отнести к школьной математике.

В предыдущей главе мы определили решетку как упорядоченное множество $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$, в котором для любых двух элементов $a, b \in P$ существуют $\sup_{\mathscr{P}}\{a, b\}$ и $\inf_{\mathscr{P}}\{a, b\}$. Обе эти записи достаточно ясно выражают, какие элементы соответствуют паре a, b, но они неудобны своей громоздкостью. Поэтому в теории решеток принято соглашение вместо $\sup_{\mathscr{P}}\{a, b\}$ писать $a \vee b$, а вместо $\inf_{\mathscr{P}}\{a, b\}$ писать $a \wedge b$. В том случае, когда $a = b$, эти определения расширяют, полагая $a \vee a = a \wedge a = a$. Запись $c = a \vee b$ (соответственно $d = a \wedge b$) читаем: «c равно объединению a и b» (соответственно «d равно пересечению a и b»). Элемент c называется *объединением* элементов a и b, элемент d называется их *пересечением*.

Пример 12. Пусть E обозначает трехмерное пространство, $L(E)$ — множество, элементами которого являются E, $\varnothing$ и всевозможные плоскости, прямые и точки пространства E. При этом прямые, плоскости и пространство понимаются как множества точек, а точка как одноэлементное множество точек. Нужно доказать, что $(L(E), \subset)$ является полной решеткой.

Решение. Снова используем теорему 2. Очевидно, что E является наибольшим элементом рассматривае-

мого у. м. Если M — некоторое множество геометрических объектов из E, то обозначим через Δ множество всех точек, которые принадлежат всем множествам из M. Мы хотим показать, что $\Delta \in L(E)$. Это очевидно, если $\Delta = \varnothing$ или Δ содержит единственную точку. Если Δ

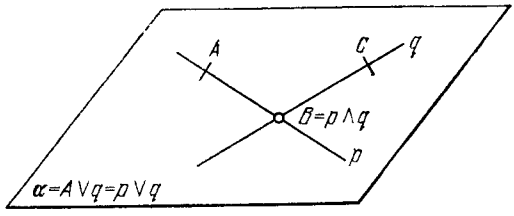


Рис. 5.

содержит две различные точки A и B, то эти точки содержатся в каждом из геометрических объектов, принадлежащих M, а поэтому каждый такой объект содержит и прямую p, определяемую ими. Далее, если Δ содержит еще одну точку C, не лежащую на p, то Δ содержит, как можно увидеть, рассуждая аналогично, и все точки плоскости α, определяемой точкой C и прямой p. Если же в Δ содержится точка D, которая не лежит на плоскости α, то Δ содержит и все точки пространства E. В каждом из этих случаев $\Delta \in L(E)$, и легко заметить, что $\Delta = \inf_{(L(E),\subset)} M$. Согласно теореме 2 $(L(E), \subset)$ будет полной решеткой.

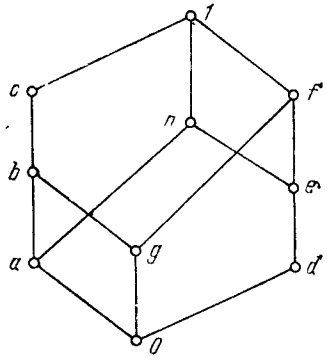


Рис. 6.

В только что рассмотренном примере обратим внимание на то, что объединение $A \vee B$ точек A и B (см. рис. 5) есть прямая p, пересечение прямых p и q совпадает с точкой B и т. д. Этот пример иллюстрирует геометрическое истолкование используемых терминов.

В решетке, диаграмма которой изображена на рис. 6, выполняются, например, соотношения $c \wedge f = g$,

$b \vee h = 1$. Вообще пересечения и объединения в этой решетке задаются следующими таблицами:

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
a	a	a	b	c	h	h	1	b	h	1
b	b	b	b	c	1	1	1	b	1	1
c	c	c	c	c	1	1	1	c	1	1
d	d	h	1	1	d	e	f	f	h	1
e	e	h	1	1	e	e	f	f	h	1
f	f	1	1	1	f	f	f	f	1	1
g	g	b	b	c	f	f	f	g	1	1
h	h	h	1	1	h	h	1	1	h	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	0	0	0	0	a	a
b	0	a	b	b	0	0	g	g	a	b
c	0	a	b	c	0	0	g	g	a	c
d	0	0	0	0	d	d	d	0	d	d
e	0	0	0	0	d	e	e	0	e	e
f	0	0	g	g	d	e	f	g	e	f
g	0	0	g	g	0	0	g	g	0	g
h	0	a	a	a	d	e	e	0	h	h
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1

Задача 12. В каждой решетке $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ для всех $a, b, c \in P$ истинны следующие соотношения:

a) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;

b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *);

c) если $a \leqslant b$, то $a \wedge b = a$ и $b = a \vee b$;

d) $a \wedge b \leqslant a$, $a \leqslant a \vee b$;

e) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$;

f) если $a \wedge b = a \vee b$, то $a = b$.

[Указание. В доказательстве e) используйте d) и c), а свойство f) выведите с помощью d).]

Пример 13. Пусть $C(\rho)$ будет множество всех открытых кругов на плоскости ρ. При этом пустое множество также будем считать открытым кругом. Нужно выяснить, будет ли у. м. $(C(\rho), \subset)$ решеткой.

Решение. Собственно решению предпошлем сначала следующие рассуждения. Пусть M, N будут два круга (см. рис. 7) и пусть H, D — круги, ограниченные окружностями, касающимися одновременно окружностей обоих кругов M и N. Очевидно, что $N \subset H$ и $M \subset H$; аналогично $D \subset M$ и $D \subset N$. Отсюда следует, что H является верхней гранью множества $\{M, N\}$, а D — нижней гранью этого множества. Рассмотренный рисунок на первый взгляд настолько убедителен, что можно было бы подумать, будто H является наименьшей верхней гранью

*) Доказательство см. в «Приложении», предложение 1.

множества $\{M, N\}$, а D — его наибольшей нижней гранью, т. е. можно было бы подумать, что у. м. $(C(\rho), \subset)$ является решеткой. Поучительно, что рассмотрение этого рисунка ввело в заблуждение даже известного популяризатора современной математики профес-

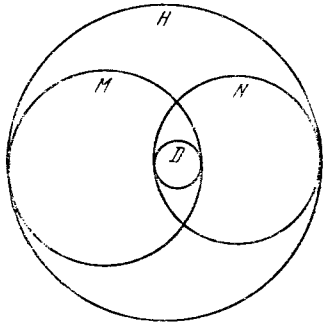


Рис. 7.

сора Папи ([10], стр. 130, упр. 5). Заметим, что на самом деле для упомянутых кругов M, N точная верхняя грань множества $\{M, N\}$ в у. м. $(C(\rho), \subset)$ не существует.

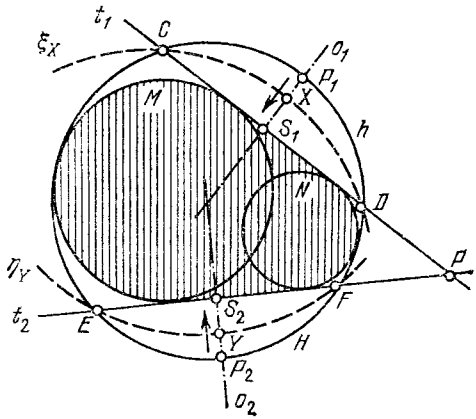


Рис. 8.

Если бы некоторый круг S был точной верхней гранью множества $\{M, N\}$, то каждая его точка должна была бы лежать внутри острого угла, определяемого касательными t_1 и t_2 (рис. 8). Чтобы это доказать, обозначим

через C и D точки пересечения касательной t_1 с окружностью h круга H, а через E и F точки пересечения касательной t_2 с той же окружностью. Пусть o_1 (соответственно o_2) обозначает перпендикуляр, восставленный из середины отрезка CD (соответственно EF), P_1 (соответственно P_2) — точку пересечения окружности h с прямой o_1 (соответственно o_2), S_1 (соответственно S_2) — середину отрезка CD (соответственно EF). Возьмем точку X (соответственно Y) на отрезке P_1S_1 (соответственно P_2S_2). Окружность ξ_X, определяемая точками C, X, D (соответственно окружность η_Y, определяемая точками E, Y, F), ограничивает круг K_X (соответственно L_Y), который содержит круги M и N и потому должен содержать круг S. Таким образом, круг S должен принадлежать кругам K_X и L_Y при любом выборе точки X на отрезке P_1S_1 и точки Y на отрезке P_2S_2, а значит, и пересечению всех таких кругов. Нетрудно доказать (докажите!), что для всякой точки Z, не лежащей внутри острого угла CPE, можно подобрать точки X и Y так, чтобы точка Z не попала в пересечение кругов K_X и L_Y. Следовательно, пересечение всех таких кругов, а значит, и лежащий в этом пересечении круг S, лежит внутри острого угла CPE. Это, однако, не совместимо с тем, что круг S должен содержать круги M и N.

Задача 13. Опишите множество точек, которые принадлежат всем кругам, содержащим оба круга M, N, на рис. 8.

[Это будут в точности те точки, которые лежат в заштрихованной области.]

Пример 14. Пусть снова ρ — некоторая плоскость, которую мы будем рассматривать как множество точек. Подмножество M плоскости ρ называется *выпуклым* тогда и только тогда, когда для любой пары точек X, Y из M весь отрезок XY лежит в M *). Обозначим через $K(\rho)$ множество всех выпуклых подмножеств плоскости ρ. Нужно доказать, что $(K(\rho), \subset)$ является полной решеткой.

Решение. Проверим, что выполняются условия теоремы 2. Наибольшим элементом у. м. $(K(\rho), \subset)$ является, очевидно, вся плоскость ρ. Если M — некоторое непустое множество выпуклых подмножеств A, B, ...; то их пересечение состоит из тех точек плоскости ρ, которые принадлежат всем подмножествам A, B, ... Так как эти подмножества все являются выпуклыми, то из

*) Детальное изучение понятия выпуклого множества читатель найдет в интересной книжке И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [8].

принадлежности точек X, Y их пересечению следует, что отрезок XY принадлежит всем подмножествам A, B, ..., а значит, и их пересечению. Отсюда уже легко получается, что упомянутое пересечение является точной нижней гранью множества M.

Пример 15. Доказать, что у. м. (N_0, σ_1) из задачи 1 является полной решеткой.

Решение. Используем теорему 2. При упорядочении σ_1 число 0 является наибольшим элементом у. м. (N_0, σ_1). Пусть M — некоторое непустое подмножество множества N_0, а C обозначает множество всех тех чисел из N_0, которые делят все числа из M. Конечно, $C \neq \varnothing$, поскольку $1 \in C$. Если $M = \{0\}$, обозначим число 0 буквой d. Если M — подмножество, которое содержит по крайней мере одно натуральное число, скажем a, то буквой d обозначим наибольшее из чисел, принадлежащих C (наибольшее в смысле обычного упорядочения $\leqslant$); d существует, поскольку мы должны делать выбор из делителей числа a, а их конечное число. Мы утверждаем, что d является точной нижней гранью множества M при упорядочении σ_1. Прежде всего, по определению d, имеем $d\sigma_1 m$, каким бы ни было $m \in M$. Если для некоторого d_1 также имеем $d_1\sigma_1 m$ при любом $m \in M$, то каждое $m \in M$ будет кратным наименьшего общего кратного k чисел d и d_1. Поэтому $d \leqslant k$, а так как мы только что видели, что $k \in C$, то согласно выбору d имеем $d = k$. Поскольку всегда $d_1\sigma_1 k$, мы получаем, что $d_1\sigma_1 d$, а потому имеет место (3i), чем и завершается доказательство существования в (N_0, σ_1) точной нижней грани множества M.

Теперь рассмотрим два способа, которые позволяют превратить данную плоскость в упорядоченное множество. Будем предполагать, что на этой плоскости задана прямоугольная система координат. Каждой точке плоскости она сопоставляет упорядоченную пару (r_1, r_2), составленную из координат r_1, r_2 этой точки.

Пример 16. Для двух пар (r_1, r_2), (s_1, s_2) действительных чисел пишем $(r_1, r_2) \ll (s_1, s_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место одна из следующих ситуаций:

(i) $(r_1, r_2) = (s_1, s_2)$ *);

(ii) $r_1 < s_1$;

(iii) $r_1 = s_1$ и $r_2 < s_2$.

*) Это равенство означает, что $r_1 = s_1$ и одновременно $r_2 = s_2$

Исследовать так определенное отношение $\ll$.

Решение. Согласно (i) отношение $\ll$ рефлексивно. Это отношение и антисимметрично. Действительно, если $(r_1, r_2) \ll (s_1, s_2)$ и одновременно $(s_1, s_2) \ll (r_1, r_2)$, то какие бы из ситуаций (i)—(iii) ни имели места — всегда $r_1 \leqslant s_1$ и $s_1 \leqslant r_1$, откуда $s_1 = r_1$. При этом случай (iii) не может одновременно появиться в обоих рассматриваемых неравенствах, поскольку тогда было бы $r_2 < s_2$ и $s_2 < r_2$, что невозможно. Значит, представляется единственная возможность — случай (i). Отношение $\ll$ транзитивно. В самом деле, если $(r_1, r_2) \ll (s_1, s_2)$ и $(s_1, s_2) \ll (t_1, t_2)$, то при $(r_1, r_2) = (s_1, s_2)$ или при $(s_1, s_2) = (t_1, t_2)$ будет $(r_1, r_2) \ll (t_1, t_2)$. Если же $(r_1, r_2) \neq (s_1, s_2)$ и $(s_1, s_2) \neq (t_1, t_2)$, то либо, по крайней мере, одно из чисел $t_1 - s_1$, $s_1 - r_1$ положительно, и тогда $t_1 - r_1 = (t_1 - s_1) + (s_1 - r_1) > 0$, что вследствие (ii) дает $(r_1, r_2) \ll (t_1, t_2)$, либо оба эти числа равны нулю, откуда $t_1 = r_1$, но $t_2 - r_2 = (t_2 - s_2) + (s_2 - r_2)$ будет суммой двух положительных чисел, т. е. $t_2 > r_2$, и потому $(r_1, r_2) \ll (t_1, t_2)$. Так как вследствие (i)—(iii) при любом выборе (r_1, r_2), (s_1, s_2) всегда будет $(r_1, r_2) \ll (s_1, s_2)$ или $(s_1, s_2) \ll (r_1, r_2)$, то получается цепь, которая по теореме 1 является решеткой.

Упорядочение $\ll$ называется *лексикографическим*.

Задача 14. Пусть $\ll$ обозначает лексикографическое упорядочение точек плоскости и пусть $A = (a, b)$ есть некоторая точка этой плоскости. Найдите множество всех таких точек $X = (x, y)$, которые удовлетворяют неравенству $A \ll X$.

[Это те точки X, для которых $a < x$, и точки луча $x = a$, $b \leqslant y$.]

Задача 15. Опишите множество точек X, которые одновременно удовлетворяют неравенствам $A \ll X$ и $X \ll B$, где $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ суть две произвольно выбранные точки.

[Указание. Выделите случаи $a = c$, $a < c$.]

Задача 16. Пусть $A = (a, b)$ — данная точка плоскости ρ. Определите все прямые p плоскости ρ, которые обладают тем свойством, что для любой их точки B выполняется $B \ll A$.

[Это будут в точности все прямые, параллельные оси y и имеющие уравнение $x = e$, где $e < a$.]

Задача 17. Для двух пар (r_1, r_2), (s_1, s_2) действительных чисел определим $(r_1, r_2) \leqslant (s_1, s_2)$ тогда и только

тогда, когда $r_1 \leqslant s_1$ и одновременно $r_2 \leqslant s_2$. Докажите, что отношение $\leqslant$ задает на множестве всех пар (r_1, r_2) упорядочение и что получающееся у. м. является решеткой, в которой

$$(r_1, r_2) \vee (s_1, s_2) = (\max(r_1, s_1), \max(r_2, s_2)),$$
$$(r_1, r_2) \wedge (s_1, s_2) = (\min(r_1, s_1), \min(r_2, s_2)).$$

Пример 17. Обозначим через Q множество всех квадратных трехчленов $x^2 + px + q$ с действительными коэффициентами, для которых дискриминант $\Delta = p^2 - 4q$ неотрицателен. Для двух квадратных трехчленов $x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1, 2$, принадлежащих Q, будем писать

$$x^2 + p_2 x + q_2 \ll x^2 + p_1 x + q_1$$

тогда и только тогда, когда

$$p_1 - p_2 \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|,$$

где $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i$. Исследуем отношение $\ll$.

Решение. Сначала докажем, что отношение $\ll$ является упорядоченностью множества Q. Сразу отметим, что это отношение очевидным образом рефлексивно. Оно также симметрично, поскольку если $p_1 - p_2 \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ и $p_2 - p_1 \geqslant |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}|$, то $p_1 - p_2 \geqslant 0$ и $p_2 - p_1 \geqslant 0$, т. е. $p_1 = p_2$, и потому $\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} = 0$, откуда следует, что $q_1 = q_2$. Отношение $\ll$ транзитивно, так как из $p_1 - p_2 \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ и $p_2 - p_3 \geqslant |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}|$ получается, что $p_1 - p_3 = (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}| + |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}| \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_3}|$; на последнем шаге применяется неравенство треугольника.

Получим еще следующую наглядную характеризацию отношения $\ll$: неравенство $x^2 + p_2 x + q_2 \ll x^2 + p_1 x + q_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для корней $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ многочлена $x^2 + p_1 x + q_1$ и корней $\alpha_2 \leqslant \beta_2$ многочлена $x^2 + p_2 x + q_2$ имеют место неравенства $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ и $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Чтобы доказать это, заметим, что соотношение $p_1 - p_2 \geqslant |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ равносильно одновременной выполнимости неравенств

$$p_1 - p_2 \geqslant \sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1} \quad \text{и} \quad p_1 - p_2 \geqslant \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2},$$

т. е. равносильно одновременной выполнимости соотношений

$$\alpha_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqslant \frac{-p_2 - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \alpha_2$$

и

$$\beta_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqslant \frac{-p_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \beta_2.$$

Используя результат задачи 17, получаем, что и здесь упорядоченное множество является решеткой. В ней для трехчленов $x^2 + p_3x + q_3$, $x^2 + p_4x + q_4$ с корнями $\alpha_3 \leqslant \beta_3$ и $\alpha_4 \leqslant \beta_4$ объединение

$$x^2 + p_3x + q_3 \vee x^2 + p_4x + q_4$$

(соответственно пересечение $x^2 + p_3x + q_3 \wedge x^2 + p_4x + q_4$) будет совпадать с трехчленом $x^2 + p_5x + q_5$ (соответственно $x^2 + p_6x + q_6$), имеющим корни $\alpha_5 = \max(\alpha_3, \alpha_4) \leqslant \beta_5 = \max(\beta_3, \beta_4)$ (соответственно имеющим корни $\alpha_6 = \min(\alpha_3, \alpha_4) \leqslant \beta_6 = \min(\beta_3, \beta_4)$).

Значит,

$$p_5 = -\left[\max\left(\frac{-p_3 - \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 - \sqrt{\Delta_4}}{2}\right) + \max\left(\frac{-p_3 + \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 + \sqrt{\Delta_4}}{2}\right)\right],$$

$$q_5 = \max\left(\frac{-p_3 - \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 - \sqrt{\Delta_4}}{2}\right) \times \max\left(\frac{-p_3 + \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 + \sqrt{\Delta_4}}{2}\right),$$

а заменяя в этих формулах символ max символом min, получим формулы для p_6, q_6.

Упражнения

1. Для кругов M, N на рис. 7 в у. м. $(C(\rho), \supset)$ точная нижняя грань множества $\{M, N\}$ не существует. Докажите.

2. Докажите, что если K_1, K_2 — два круга в смысле примера 13, причем $K_1 \neq \varnothing$ и $K_2 \neq \varnothing$, то существует в точности один круг K, который содержит K_1 и K_2 и имеет наименьший радиус.

3. Докажите: если K_1, K_2 — два круга из примера 13, пересечение которых не пусто, то существует в точности один круг K, который содержится в K_1 и K_2 и который имеет наибольший радиус.

4. Выяснить, образует ли решетку (соответственно полную решетку) множество $C(p, p)$ всех кругов, центры которых лежат на данной прямой p (включая пустое множество), упорядоченное включением (ср. с примером 13).

5. Подмножество M некоторой плоскости назовем *звездчатым* тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующему условию (см. рис. 9): в M существует по крайней мере одна точка S такая, что вместе с каждой точкой X из M в M лежит и весь отрезок SX. Например, фигура $ABCGFED$ представляет собой звездчатое множество. Обозначим через $H(\rho)$ множество всех звездчатых множеств плоскости ρ. Установите, будет ли $(H(\rho), \subset)$ а) упорядоченным множеством, b) решеткой, c) полной решеткой.

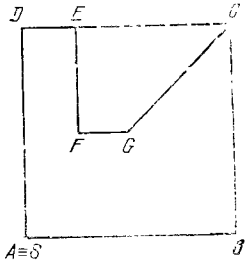


Рис. 9.

6. Обозначим через $F(\boldsymbol{R})$ множество, элементами которого являются всевозможные последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots \alpha_n, \ldots$ действительных чисел (краткая запись последовательности $\{\alpha_i\}$). Для двух последовательностей $a = \{a_i\}$, $b = \{b_i\}$ будем писать $a \ll b$ тогда и только тогда, когда $a_i \leqslant b_i$ для любого $i \in \boldsymbol{N}$. Выясните, будет ли $(F(\boldsymbol{R}), \ll)$ а) упорядоченным множеством, b) решеткой, c) полной решеткой.

7. Докажите, что в каждой решетке $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$:
   a) если $k \leqslant h$ и $n \leqslant m$, то $k \vee n \leqslant h \vee m$;
   b) если $d_1 \leqslant h$ и $d_2 \leqslant h$, то $d_1 \vee d_2 \leqslant h$;
   c) если $c \leqslant d$, то для любого $g \in P$ будет $c \vee g \leqslant d \vee g$;
   d) если $k \leqslant h$ и $n \leqslant m$, то $k \wedge n \leqslant h \wedge m$;
   e) если $d \leqslant h_1$ и $d \leqslant h_2$, то $d \leqslant h_1 \wedge h_2$;
   f) если $c \leqslant d$, то для любого $g \in P$ будет $c \wedge g \leqslant d \wedge g$.

8. Докажите, что в каждой решетке $\mathscr{P}$ для любых элементов $a, b, c \in P$:
   a) $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
   b) $a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
   c) если $a \leqslant c$, то $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$.

Глава 4

ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ РЕШЕТОК

В задаче 12 мы установили, что в каждой решетке $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ для любых a, b, c из P выполняются условия

(S1) $a \vee b = b \vee a$;

(S2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

(S3) $a \vee (a \wedge b) = a$;

(P1) $a \wedge b = b \wedge a$;

(P2) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

(P3) $a \wedge (a \vee b) = a$.

Можно доказать*) и обратное: если на некотором непустом множестве P определены две операции $\wedge$, $\vee$ так, что выполняются условия (S1)—(S3) и (P1)—(P3), и если ввести отношение $\leqslant$, полагая $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = a$, то это отношение $\leqslant$ упорядочивает множество P и $(P, \leqslant)$ оказывается решеткой. Учитывая это, часто о решетке $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ говорят как о решетке $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$. Например, в решетке $\mathscr{P} = (P(E), \subset)$ операциями являются $\cup$, $\cap$ (объединение и пересечение), и ее записывают так же как тройку $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$.

Если возьмем в решетке $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ три множества A, B, C, принадлежащие $P(E)$, то

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

и

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(приведем краткое доказательство первого соотношения: элемент x принадлежит множеству $A \cap (B \cup C)$ тогда и только тогда, когда он принадлежит A и одновременно принадлежит B или C, т. е. когда он принадлежит $A \cap B$ или $1 \cap C$. Впоследствии мы увидим, что второе соотношение является следствием первого и того факта, что $\mathscr{P}(E)$ является решеткой).

Решетка $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ называется *дистрибутивной* тогда и только тогда, когда в $\mathscr{P}$ для любых $a, b, c \in P$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{4}$$

и

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{5}$$

Согласно этому определению $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ является дистрибутивной решеткой.

Будем говорить, что непустое подмножество M носителя P решетки $\mathscr{P}$ *замкнуто* относительно операций $\vee$ и $\wedge$ тогда и только тогда, когда для любых m, n, принадлежащих M, этому подмножеству принадлежат также $m \vee n$ и $m \wedge n$. Упорядоченная тройка $(M, \vee, \wedge)$ в этом случае называется *подрешеткой* решетки $(P, \vee, \wedge)$ (или решетки $(P, \leqslant)$). Множество M называется *носителем* этой подрешетки. Поскольку для любых трех элементов a, b, c из M выполняются условия (S1)—(S3) и

*) См. «Приложение», предложение 2.

(P1)—(P3), каждая подрешетка является и решеткой.

Пример 18. Пусть E обозначает некоторое непустое множество. Обозначим через $F(E)$ множество всех тех подмножеств множества E, которые имеют конечное число элементов. Нужно доказать, что $(F(E), \cup, \cap)$ является подрешеткой решетки $\mathscr{P}(E)$.

Решение. Очевидно, $\varnothing \in F(E)$, и потому $F(E)$ не пусто. Если F_1, F_2 — два множества, принадлежащие $F(E)$, то множества $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$ имеют конечное число элементов, т. е. принадлежат $F(E)$.

Задача 18. Пусть $\mathscr{P}$ есть решетка с диаграммой, изображенной на рис. 10. Установите, будет ли множество

a) $M_1 = \{0, e, f, g, h\}$;
b) $M_2 = \{0, a, b, c, d, 1\}$;
c) $M_3 = \{0, e, f, 1\}$

носителем какой-либо подрешетки решетки $\mathscr{P}$.

[a), b) да, c) нет, поскольку $h = e \vee f \notin M_3$.]

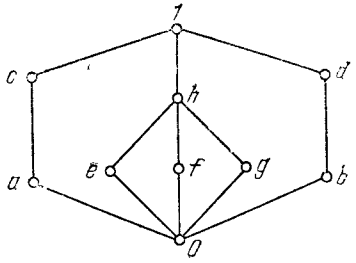


Рис. 10.

Пример 19. Пусть ρ — некоторая плоскость трехмерного пространства E (см. пример 12) и пусть $R(\rho; T)$ обозначает множество, элементами которого являются,

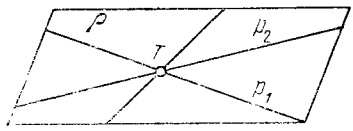


Рис. 11.

в том же смысле как и в примере 12, плоскость ρ, любая заданная точка T плоскости ρ и все те прямые p плоскости ρ, которые проходят через точку T (рис. 11). Нужно

доказать, что $R(\rho; T)$ является носителем подрешетки решетки $(L(E), \subset)$.

Решение. Пересечение и объединение элементов непустого множества $R(\rho; T)$ снова будет элементом этого множества.

Пример 20. Доказать, что если в решетке $\mathscr{P}$ тождество (4) выполняется для всех $a, b, c \in P$, то в $\mathscr{P}$ выполняется и (5).

Решение. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = && \text{(согласно (4))} \\
&= a \vee [(a \vee b) \wedge c] = && \text{(согласно (P3) и (P1))} \\
&= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] = && \text{(согласно (4))} \\
&= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) = && \text{(согласно (S2))} \\
&= a \vee (b \wedge c). && \text{(согласно (S3))}
\end{aligned}
$$

Замечание. Если мы в списке условий (S1)—(S3) и (P1)—(P3) заменим символ $\vee$ на $\wedge$ и обратно, то получится снова тот же список. Отсюда следует, что если мы произведем такую замену в некотором утверждении, истинном во всех решетках, то получим снова истинное утверждение. Эта замена называется *дуализацией* исходного утверждения. Например, дуальным для утверждения из примера 20 будет утверждение о том, что в любой решетке тождество (4) является следствием тождества (5).

Пример 21. Нужно доказать, что если решетка $\mathscr{P}$ содержит подрешетку с диаграммой, подобной одной из

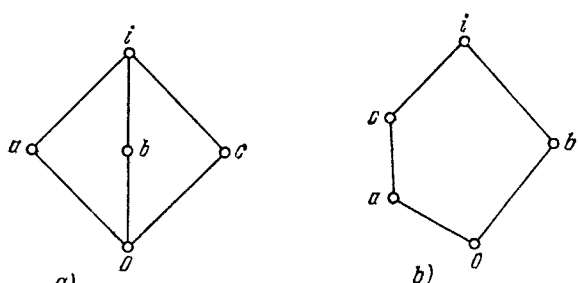


Рис. 12.

двух диаграмм, изображенных на рис. 12, *a* и 12, *b*, то $\mathscr{P}$ не дистрибутивна.

Решение. Действительно, $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$, но $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = i \wedge (a \vee c) = a \vee c \neq a$.

Замечание. Можно доказать*), что если решетка $\mathscr{P}$ не дистрибутивна, то она содержит подрешетку с диаграммой, подобной одной из двух диаграмм на рис. 12, *а*, *b*.

Пример 22. Доказать, что каждая цепь является дистрибутивной решеткой.

Решение. По теореме 1 цепь является решеткой. Вследствие примера 20 достаточно установить, что $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ для любых трех элементов a, b, c цепи. Пример 9 сводит это к доказательству того, что элемент $l = \min(a, \max(b, c))$ равен элементу $p = \max(\min(a, b), \min(a, c))$. При этом из определения минимума и максимума, очевидно, что l есть один из элементов a, b, c. Если $l = a$, то $a \leqslant \max(b, c)$ (см.

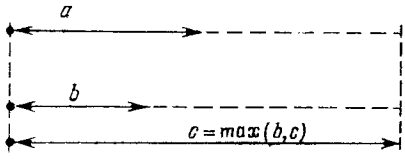


Рис. 13.

рис. 13), а тогда будет $a \leqslant b$ или $a \leqslant c$. Но в обоих случаях по крайней мере один из элементов $\min(a, b)$, $\min(a, c)$ равен a, а другой меньше или равен a, т. е. $p = a$.

Если $l = b$, то будет $b = a$ и $p = \max(b, \min(b, c))$, либо $b = \max(b, c)$ и одновременно $b \leqslant a$. Но это означает, что $c \leqslant b \leqslant a$, и тогда $p = \max(b, c) = b$. Подобным образом поступаем и в случае $l = c$.

Задача 19. Два элемента a, b решетки $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ называются *сравнимыми* тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Не используя примера 22, докажите, что если один из трех элементов a, b, c решетки $\mathscr{P}$ сравним с каждым из двух остальных элементов, то $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ и $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

[Указание. Докажите, что наименьшая подрешетка решетки $\mathscr{P}$, которая содержит элементы a, b, c, должна иметь такую же диаграмму, как решетка $\mathscr{P}(\{a, b\}) = (P(\{a, b\}), \subset)$, либо должна быть цепью и

*) См. «Приложение», предложение 6.

иметь диаграмму такую же, как подрешетка решетки $\mathcal{P}(\{a, b\})$ с носителем $\{0, \{a\}, \{a, b\}\}$. Подрешетка дистрибутивной решетки дистрибутивна.]

Задача 20. Используя результат задачи 19, дайте другое доказательство утверждения примера 22.

Пример 23. Выяснить, будет ли решетка (N_0, σ_1) из задачи 1 дистрибутивной.

Решение. В примере 7 мы доказали, что точная верхняя (соответственно точная нижняя грань) двухэлементного множества a, b чисел из N совпадает с их наименьшим общим кратным (соответственно с их наибольшим общим делителем). Для доказательства дистрибутивности согласно примеру 20 достаточно проверить истинность (4). К тому же можем предположить, что каждое из чисел a, b, c отлично от нуля. [Число 0 является наибольшим элементом у. м. (N_0, σ_1), и поэтому сравнимо с любым элементом из N_0, так что, ввиду задачи 19, (4) выполняется, если одно из чисел a, b, c равно 0.] Обозначим $l = a \wedge (b \vee c)$, $p = (a \wedge b) \vee \vee (a \wedge c)$ и запишем

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{где} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N_0;$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad \text{где} \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in N_0;$$

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}, \quad \text{где} \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in N_0.$$

(Во всех этих выражениях можем писать одни и те же простые числа $p_1, p_2, \dots, p_k$, поскольку мы допускаем и степени с показателем 0.) Как известно, наибольший общий делитель $a \wedge b$ чисел a, b есть число $p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$, где $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ для $i = 1, 2, \dots, k$ и, аналогично, наименьшее общее кратное $a \vee b$ чисел a, b есть число $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$, где $\nu_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Тогда l равно числу $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k}$, где $\lambda_i = \min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))$, а p — числу $p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_k^{\pi_k}$, где показатели $\pi_i = \max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$. Но теперь примем во внимание, что показатели α_i, β_i, γ_i являются элементами цепи $(N_0, \leqslant)$. Отсюда и из решения примера 22 вытекает, что $\lambda_i = \pi_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$, т. е. что $l = p$.

Пример 24. Нужно доказать, что решетка $(R(\rho; T), \subset)$ из примера 19:

a) не дистрибутивна;

b) удовлетворяет для любых a, b, $c \in R(\rho; T)$ следующему условию: если $a \leqslant c$, то $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ *).

Решение. a) Если p_1, p_2, p_3 — три разные прямые из $R(\rho; T)$, то множество $\{T, p_1, p_2, p_3, \rho\}$ является носителем подрешетки с диаграммой на рис. 14. Согласно примеру 12 решетка $(R(\rho; T), \subset)$ не дистрибутивна.

b) Для доказательства указанного соотношения прежде всего заметим, что оно выполняется каждый раз, когда можно применить тождество (5), поскольку $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$, если учесть, что $a \vee c = c$ при $a \leqslant c$. Если $a = c$, то $a \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge a) = a$ вследствие (P1) и (S3). С другой стороны, $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge a = a$ вследствие (P3) и (P1). Для дальнейшего можем предположить, что $a < c$. Это означает, что (i) a есть точка T, а c — некоторая прямая из $R(\rho; T)$, либо (ii) a есть прямая из $R(\rho; T)$, а c совпадает с ρ. В обоих случаях один из трех элементов будет наименьшим или наибольшим из элементов у. м. $R(\rho; T)$, а потому сравним с любым элементом из $R(\rho; T)$. Учитывая вводное замечание и задачу 19, заключаем, что и в этих случаях доказываемое соотношение истинно.

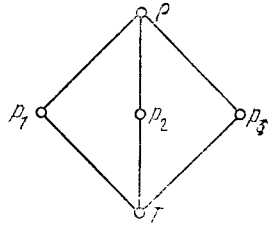


Рис. 14.

Решетка $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$, в которой при любых a, b, $c \in P$ из $a \leqslant c$ следует, что $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, называется *модулярной*.

Задача 21. Каждая дистрибутивная решетка модулярна.

Пример 25. Нужно доказать, что если решетка $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ содержит подрешетку с диаграммой, подобной диаграмме на рис. 12, *b*, то эта решетка не модулярна.

Решение. С одной стороны, $a \vee (b \wedge c) = a$, а с другой — $(a \vee b) \wedge c = c \neq a$.

---

*) Другими словами, условие (5) выполняется, если $a \leqslant c$. — *Прим. ред.*

Замечание. Можно доказать *), что если решетка не модулярна, то она содержит подрешетку с диаграммой, подобной диаграмме рис. 12, *b*.

В дальнейшем мы выведем в качестве типичного образца методов, применяемых в теории решеток, характеризацию дистрибутивных и модулярных решеток. Но сначала введем еще некоторые новые понятия.

Если $a \leqslant c$ — два элемента некоторого у. м. $\mathscr{P}$, то множество тех элементов x из P, для которых одновременно $a \leqslant x$ и $x \leqslant c$, обозначается $[a, c]$ и называется *интервалом* решетки $\mathscr{P}$. Под *относительным дополнением* элемента $b \in [a, c]$ в интервале $[a, c]$ понимаем каждый элемент b_1 такой, что $b \wedge b_1 = a$ и вместе с тем $b \vee b_1 = c$. Если решетка $\mathscr{P}$ имеет наибольший элемент 1 и наименьший элемент 0, то относительное дополнение элемента a в интервале $[0, 1]$ называется *дополнением* элемента a.

Пример 26. В решетке с диаграммой рис. 10 найдите интервал $[0, h]$ и определите все дополнения элемента a, а также все относительные дополнения элемента e в интервале $[0, h]$.

Решение. $[0, h] = \{0, e, f, g, h\}$. Элементами e, f, g, h, b, d исчерпываются все дополнения элемента a. Искомыми относительными дополнениями элемента e служат f и g.

Задача 22. Если b_1 — относительное дополнение элемента $b \in [a, c]$ в интервале $[a, c]$ такое, что $b_1 = c$, то $a = b$. Докажите.

Задача 23. Докажите, что если $[a, c]$ — интервал дистрибутивной решетки $\mathscr{P}$ и если $b \in [a, c]$, то для элемента b существует не более одного относительного дополнения в интервале $[a, c]$.

[Указание. Если b_1 и b_2 — относительные дополнения элемента b и если $i \neq j$ — числа 1 и 2, то $b_j = b_j \wedge (b \vee b_i) = b_j \wedge b_i \leqslant b_i$.]

Задача 24. Пусть $\mathscr{P}$ — модулярная решетка. а) Проверьте, что (см. рис. 15)

(6) если элементы a, b, c, A, B, C таковы, что

$$A \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant C,$$
$$A \leqslant B \leqslant C$$

и

$$b \vee B = C, \quad b \wedge B = A,$$

*) См. «Приложение», предложение 4.

то существует относительное дополнение b_1 элемента b в интервале $[a, c]$, для которого $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$;

b) если $c = C$, то $b_1 \geqslant B$.

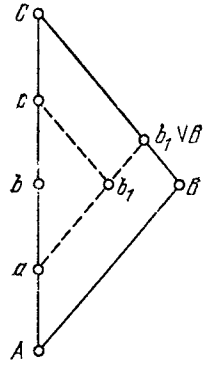


Рис. 15.

[Указание. a) Положите $b_1 = (a \vee B) \wedge c$ и докажите, что $b_1 = a \vee (B \wedge c)$. b) Используйте задачу 22.]

Теорема 3. *Решетка $\mathscr{P}$ модулярна тогда и только тогда, когда в ней выполняется условие* (6).

Доказательство. 1) Из результата задачи 24 следует, что в модулярной решетке условие (6) выполняется. 2) Пусть $\mathscr{P}$ — решетка, в которой имеет место (6). Покажем, что она необходимо модулярна. С этой целью возьмем элементы $\alpha, \beta, \gamma \in P$, причем так, чтобы

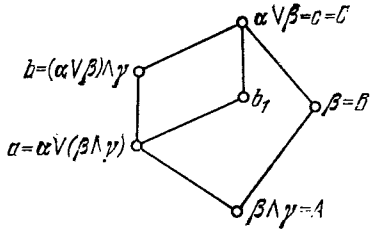


Рис. 16.

$\alpha \leqslant \gamma$. Согласно упражнению 8, c) из третьей главы, имеет место соотношение $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leqslant (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Обозначим левую и правую части этого неравенства соответственно через a и b (см. рис. 16).

Обозначим, далее, $\beta \wedge \gamma = A$, $\beta = B$, $\alpha \vee \beta = C = c$ и проверим, что элементы a, b, c, A, B, C удовлетворяют условию (6). Прежде всего, очевидно, что $A \leqslant a \leqslant b \leqslant C$, и потому

$$\beta \wedge \gamma = A = A \wedge \beta \leqslant a \wedge \beta \leqslant b \wedge \beta = [(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma] \wedge \beta = \beta \wedge \gamma.$$

Аналогично

$$\alpha \vee \beta = [\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)] \vee \beta = a \vee \beta \leqslant b \vee \beta \leqslant C \vee \beta = \alpha \vee \beta.$$

Отсюда получаем, что $a \vee B = b \vee B = C$ и $b \wedge B = A$. По предположению условие (6) выполнено, и поэтому существует относительное дополнение b_1 элемента b в интервале $[a, C]$. Согласно задаче 24, b), $b_1 \geqslant B$ и, значит, $b_1 \geqslant a \vee B = C$, откуда $b_1 = C$. Из результата задачи 22 вытекает, что в таком случае $a = b$, т. е. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$, и решетка $\mathscr{P}$, действительно, модулярна.

Задача 25. Пусть $\mathscr{P}$ — дистрибутивная решетка. Тогда в ней выполняется следующее условие:

(7) если элементы a, b, c, A, B, C таковы, что

$$A \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant C, \quad A \leqslant B \leqslant C$$

и

$$b \vee B = C, \quad b \wedge B = A,$$

то существует в точности одно относительное дополнение b_1 элемента b в интервале $[a, C]$.

[Указание. Используйте результаты задач 21, 23 и 24.]

Теорема 4. *Решетка $\mathscr{P}$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней выполняется условие* (7).

Доказательство. 1) Согласно результату задачи 25, в любой дистрибутивной решетке имеет место (7).

2) Предположим, что $\mathscr{P}$ — решетка, в которой выполняется условие (7). Поскольку прямое доказательство слишком длинно (см. упр. 8—12 этой главы), используем результат замечания к примеру 21. Если $\mathscr{P}$ содержит подрешетку с диаграммой, изображенной на рис. 12, *a* или 12, *b*, то обозначим элементы этих решеток в соответствии с обозначениями из (7) (рис. 17, 18).

Для элемента b в обоих случаях существует два разных относительных дополнения (b_1 и b_2) в интервале $[a, c]$. Это несовместимо с предположением об истинности (7), и полученное противоречие доказывает, что решетка $\mathscr{P}$ дистрибутивна.

Решетка $\mathscr{P}$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, в которой для любого элемента существует

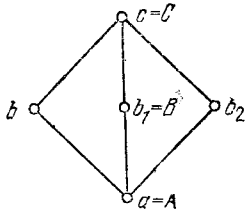


Рис. 17.

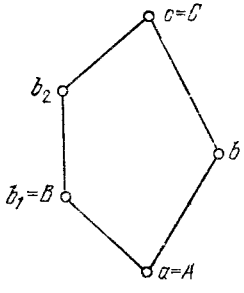


Рис. 18.

хотя бы одно дополнение, называется *решеткой с дополнениями*. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*.

Задача 26. Докажите, что в любой булевой решетке для каждого элемента $b \in [a, c]$ существует единственное относительное дополнение в интервале $[a, c]$.

[Указание. Используйте результат задачи 25.]

Теорема 5. *Решетка $\mathscr{P}$ с наименьшим и наибольшим элементами тогда и только тогда является булевой решеткой, когда для любых ее элементов a, b, c таких, что $a \leqslant b \leqslant c$, существует в точности одно относительное дополнение элемента b в интервале $[a, c]$.*

Доказательство. Ввиду результата задачи 26 достаточно доказать, что решетка $\mathscr{P}$ с указанным свойством дистрибутивна, а это вытекает из теоремы 4, и что она является решеткой с дополнениями, что непосредственно следует из условия, если выбрать в качестве a наименьший, а в качестве c наибольший элемент решетки $\mathscr{P}$.

Задача 27. Докажите, что решетка $\mathscr{P}(E)$ всех подмножеств множества E, упорядоченная включением, является булевой решеткой.

[Указание. Для $M \subset E$ дополнением будет множество $E \setminus M$, элементами которого являются те и только те элементы из E, которые не принадлежат M.]

Из задачи 26 следует, что для любого элемента булевой решетки $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ существует в точности одно дополнение, как правило, обозначаемое a'. Это позволяет определить на P еще и операцию «взятия дополнения», которая каждому элементу a сопоставляет его дополнение. Упорядоченная четверка $(P, \vee, \wedge, ')$ называется *булевой алгеброй*.

Упражнения

1. Укажите все множества, которые в решетке из упражнения 6, а) второй главы являются носителями подрешеток.

2. Докажите, что носители всех подрешеток данной решетки $\mathscr{P}$ вместе с пустым множеством образуют при упорядочении включением полную решетку, и изобразите диаграмму этой решетки для решетки $\mathscr{M}_5$ из упражнения 6, а) второй главы. Будет ли это диаграмма модулярной решетки?

3. Решетка $(F(R), \ll)$ из упражнения 6 третьей главы дистрибутивна. Докажите.

4. Докажите, что решетка $\mathscr{P}$ модулярна тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in \mathscr{P}$

$$(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)] = [(a \wedge c) \vee b] \wedge (a \vee c).$$

5. Установите, будет ли решетка $(C(\rho; p), \subset)$ из упражнения 4 третьей главы а) дистрибутивной, b) модулярной.

6. Будет ли решетка $(K(\rho), \subset)$ из примера 14 а) дистрибутивной, b) модулярной?

7. Пусть в некоторой решетке $\mathscr{P}$ имеют место неравенства $A \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant C$. Пусть, далее, b_1 будет относительным дополнением элемента b в интервале $[a, c]$, c^+ — относительным дополнением элемента c в интервале $[b_1, C]$, а a^+ — относительным дополнением элемента a в интервале $[A, c^+]$. Тогда a^+ является относительным дополнением элемента b в интервале $[A, C]$.

8. Если в решетке $\mathscr{P}$ выполняется условие (7) и элементы $A \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant C$, B, b_1 обладают свойствами одноименных элементов из (7), то а) $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$, b) $\mathscr{P}$ — модулярная решетка. Докажите.

9. Докажите, что для любых трех элементов a, b, c дистрибутивной решетки $\mathscr{P}$ справедливо равенство

$$(8) \quad [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b).$$

10. Решетка $\mathscr{P}$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in P$ выполняется равенство (8). Докажите.

11. a) Пусть $\mathscr{P}$ — модулярная решетка. Для $a, b, c \in P$ обозначим $d = a \wedge (b \vee c)$, $\beta = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$, $\gamma = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b)$. Тогда

$$d \wedge \beta = d \wedge \gamma = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$d \vee \beta = d \vee \gamma = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c);$$

$$\beta = [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c).$$

b) Если $\mathscr{P}$ — модулярная решетка, в которой выполняется условие (7), то в обозначениях из а) будет $\beta = \gamma$.

12. Не используя замечания, следующего за примером 21, докажите, что решетка, в которой выполняется условие (7), дистрибутивна.

13. a) Докажите, что в решетке (N_0, σ_1) из задачи 1 для трех чисел a, b, c из N_0 таких, что $a\sigma_1 b$, $b\sigma_1 c$, не существует относительного дополнения элемента b в интервале $[a, c]$.

b) Докажите, что решетка $(R(\rho; T), \subset)$ из примера 19 является решеткой с дополнениями, но не является булевой решеткой.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1. Речь идет о всевозможных подмножествах декартова произведения $\{a, b\} \times \{a, b\}$, и мы получаем следующие отношения: $\rho_1 = \varnothing$, $\rho_2 = \{(a, a)\}$, $\rho_3 = \{(a, b)\}$, $\rho_4 = \{(b, a)\}$, $\rho_5 = \{(b, b)\}$, $\rho_6 = \{(a, a), (a, b)\}$, $\rho_7 = \{(a, a), (b, a)\}$, $\rho_8 = \{(a, a), (b, b)\}$, $\rho_9 = \{(a, b), (b, a)\}$, $\rho_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$, $\rho_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$, $\rho_{12} = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$, $\rho_{13} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, $\rho_{14} = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$, $\rho_{15} = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$, $\rho_{16} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

2. a) $\rho_8, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{16}$; b) $\rho_1, \rho_2, \rho_5, \rho_8, \rho_9, \rho_{12}, \rho_{15}, \rho_{16}$; c) $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{13}, \rho_{14}$; d) $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{16}$.

3. Например, ρ_1, ρ_2, ρ_5.

4. a) $\rho_8, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{16}$; b) $\rho_8, \rho_{13}, \rho_{14}$; c) ρ_8, ρ_{16}.

5. a) $\varepsilon_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_3 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$, $\varepsilon_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$;

b) $\eta_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_3 = \{(a, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_5 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_6 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_7 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_8 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_9 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{10} = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_{11} = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{12} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{13} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{14} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_{15} = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$.

Глава 2

1. См. диаграмму на рис. 19.

2. См. диаграмму на рис. 20 — при обозначениях, принятых в решении упражнения 1 главы 1.

3. Здесь речь идет о у. м. $(P(M \times M), \subset)$, которое согласно примеру 10 является полной решеткой.

4. Из теоремы 2 вытекает положительный ответ в случаях a), b), d). Из результата упражнения 2 этой главы и упражнения 2. c) первой главы следует, что не существует точной верхней грани множества $\{\rho_6, \rho_7\}$ в у. м. всех антисимметричных отношений на

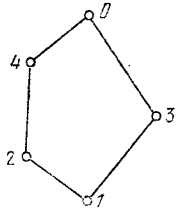


Рис. 19.

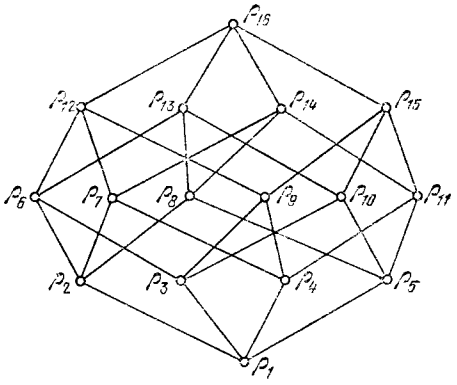


Рис. 20.

$\{a, b\}$, так что такие отношения при упорядочении включением в общем случае не образуют решетки.

5. a) С помощью теоремы 2 получаем положительный ответ. b) Из упражнения 4, b) первой главы вытекает, что не существует точной верхней грани множества $\{\rho_{13}, \rho_{14}\}$ в упорядоченном включе-

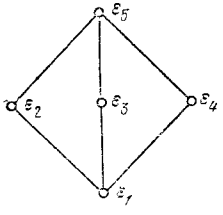


Рис. 21.

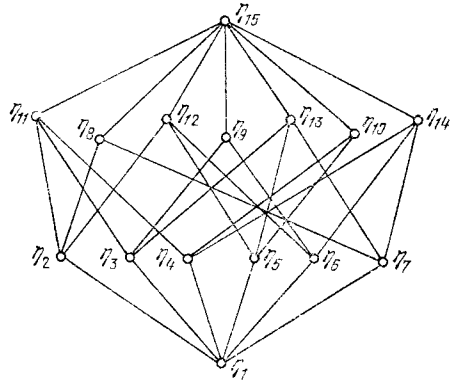


Рис. 22.

нием множестве всех упорядочений на двухэлементном множестве $\{a, b\}$, так что здесь вообще не будет решетки.

6. a) При обозначениях, принятых в решении упражнения 5, a) первой главы, получаем диаграмму решетки $\mathcal{M}_5$ (рис. 21). b) При обозначениях, принятых в решении упражнения 5, b) первой главы, получаем диаграмму, изображенную на рис. 22.

7. Обозначим $D_0 = D \cap I$ (см. пример 8). Если бы существовал $\inf_{(I, \leqslant)} D_0$, то существовал бы и $\inf_{(Q, \leqslant)} D$, что — как мы уже знаем — не имеет места.

Глава 3

1. Любой круг, который является нижней гранью для $\{M, N\}$, должен содержаться в пересеченни кругов M и N. Если бы среди этих нижних граней существовала наибольшая, она должна была бы содержать всякий круг, который содержится в пересечении обоих кругов M, N, а потому эта наибольшая нижняя грань содержала бы каждую внутреннюю точку пересечения и в то же время сама, как было сказано в начале, содержалась бы в пересечении. Это невозможно ни для какого круга.

2. Обозначим через R радиус, а через S центр некоторого круга, который содержит оба круга K_1, K_2, ограниченные окружностями

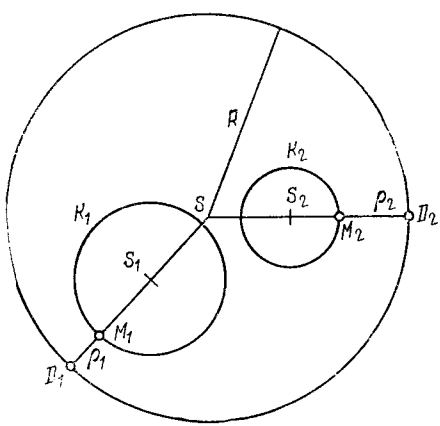


Рис. 23.

$k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$. Обозначим через M_i (соответственно D_i) точку пересечения луча SS_i с окружностью k_i (соответственно с окружностью $(S; R)$) (рис. 23). Положим $M_iD_i = \rho_i$. Конечно, $\rho_i \geqslant 0$. Тогда для $i = 1, 2$ будет $R = \rho_i + r_i + SS_i$, откуда

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{SS_1 + SS_2}{2} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Выражение, стоящее в правой части, не меньше, чем $R_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{S_1S_2}{2}$. (Это следует из того, что $\rho_1 + \rho_2 \geqslant 0$, а согласно неравенству треугольника $SS_1 + SS_2 \geqslant S_1S_2$.) При этом $R = R_0$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и одновременно S лежит на отрезке, соединяющем S_1 и S_2. Но это означает, что в данном случае речь идет об окружности, внешне касающейся обеих окружностей k_1 и k_2.

3. Обозначим через r радиус, а через S центр некоторого круга, который содержится в кругах K_1, K_2, ограниченных окружностями $k_i = (S_i, r_i)$. Обозначим через N_i (соответственно через E_i) точку

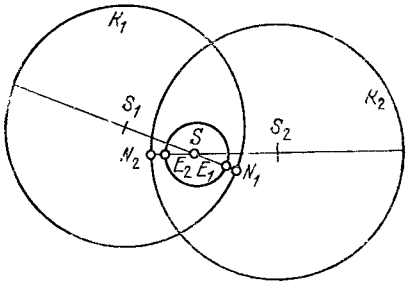


Рис. 24.

пересечения луча S_iS с окружностью k_i (соответственно с окружностью (S, r)) (рис. 24). Пусть ρ_i обозначает длину отрезка E_iN_i. Тогда $r_i = \rho_i + r + SS_i$, откуда

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{SS_1 + SS_2}{2}.$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены в предыдущем примере, получаем, что

$$r \leqslant r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{S_1S_2}{2}$$

и что равенство $r = r_0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и одновременно S лежит на отрезке, соединяющем S_1 и S_2. Это означает, что речь идет о круге, ограниченном окружностью, касающейся изнутри обеих окружностей k_1, k_2.

4. Поскольку $\varnothing$ является наименьшим элементом у. м. $C(\rho; p)$, то существование как верхней, так и нижней точной грани любого двухэлементного множества $\{K_1, K_2\}$ очевидно в случае, когда хотя бы один элемент равен пустому множеству. Точно так же очевидно, что $\varnothing$ является точной нижней гранью множества $\{K_1, K_2\}$ в случае, когда $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Если же K_1, K_2 — такие круги, что их пересечение $K_1 \cap K_2$ не пусто, возьмем круг K, ограниченный окружностью, касающейся изнутри окружностей k_1 и k_2. Любой другой круг K_3, который содержится как в K_1, так и в K_2, и центр которого лежит на прямой p, определяет на p точки пересечения C_1, C_2 такие, что отрезок C_1C_2 является частью отрезка, определяемого точками касания граничных окружностей кругов K_1, K_2, K. Но тогда и весь круг K_3 содержится в круге K. Аналогично можно использовать упражнение 2, чтобы доказать существование точной верхней грани множества $\{K_1, K_2\}$, где K_1, $K_2 \in C(\rho; p)$ — непустые круги. Поэтому $C(\rho; p)$ является решеткой. Но это не полная решетка, поскольку,

например, множество всех кругов из $C(\rho; p)$ не имеет в этом у. м. точной верхней грани.

5. Проверкой рефлексивности, транзитивности и антисимметричности установим, что $(H(\rho), \subset)$ является у. м. Но это не решетка, а тем более не полная решетка, поскольку фигура $ABCGFED$ и фигура $EFGC$ являются звездчатыми множествами, а их пересечение состоит из отрезков EF, FG и GC и не является звездчатым множеством. Отсюда видно, что для множества, состоящего из двух упомянутых фигур, в $(H(\rho), \subset)$ нижними гранями будут как EFG, так и FGC, но наибольшей нижней грани (принадлежащей $H(\bar{\rho})$) это множество не имеет. Так что для двухэлементного множества $\{ABCGFED, EFGC\}$ в $(H(\rho), \subset)$ точной нижней грани не существует.

6. Речь идет об у. м., являющемся даже решеткой. В ней $\{a_i\} \vee \{b_i\} = \{c_i\}$, где $c_i = \max(a_i, b_i)$, и $\{a_i\} \wedge \{b_i\} = \{d_i\}$, где $d_i = \min(a_i, b_i)$. Но это не полная решетка, поскольку если мы возьмем за M множество всех последовательностей вида $n, n, n, \ldots$ (для $n = 1, 2, \ldots$), то увидим, что в решетке $(F(R), \ll)$ не существует верхней грани множества M.

7. a) Поскольку $k \leqslant h$ и $n \leqslant m$ и поскольку $h \vee m$ является верхней гранью множества $\{h, m\}$, то $h \leqslant h \vee m$ и аналогично $m \leqslant h \vee m$. Вследствие транзитивности отношения $\leqslant$, также будет $k \leqslant h \vee m$ и $n \leqslant h \vee m$, так что $h \vee m$ является верхней гранью множества $\{k, n\}$; ввиду (3s) тогда $k \vee n \leqslant h \vee m$. b) В a) положите $k = d_1$, $m = h_1$, $n = d_2$ и примите во внимание, что $h \vee h = h$. c) В a) положите $h = d$, $k = c$ и $m = n = g$. d)—f) выводятся аналогично.

8. a) Всегда $a \leqslant a \vee b$ и $a \leqslant a \vee c$. Поэтому ввиду упражнения 7, e) будет $a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Далее, $b \wedge c \leqslant b \leqslant a \vee b$ и аналогично $b \wedge c \leqslant c \leqslant a \vee c$. То же упражнение дает нам $b \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Из упражнения 7, b) вытекает, что $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. b) Будем исходить из соотношений $a \geqslant a \wedge b$, $a \geqslant a \wedge c$ и действовать, как в случае a). c) Если $a \leqslant c$, то $a \vee c = c$ и утверждение в c) является следствием a).

Глава 4

1. Любое одноэлементное множество $U_i = \{\varepsilon_i\}$ является носителем подрешетки. Из двухэлементных множеств образуют подрешетки в точности следующие (см. рис. 21):

$$B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}, \quad B_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}, \quad B_4 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_5\},$$

$$B_5 = \{\varepsilon_2, \varepsilon_5\}, \quad B_6 = \{\varepsilon_3, \varepsilon_5\}, \quad B_7 = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}.$$

Трехэлементные: $T_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5\}$, $T_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $T_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Четырехэлементные:

$$Q_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}, \quad Q_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}, \quad Q_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}.$$

И само множество $M_5 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$, конечно, является носителем подрешетки.

2. Используем теорему 2: P есть наибольший элемент этого у. м. и если M — некоторое непустое множество носителей подрешетки решетки $\mathscr{P}$, то их пересечение будет либо пустым множеством, либо носителем подрешетки.

Диаграмма этой решетки для решетки $\mathscr{M}_5$ представлена на рис. 25.

Эта диаграмма согласно примеру 25 не модулярна (т. е. не является диаграммой модулярной решетки), поскольку $\{\varnothing, U_4, B_7, B_1, Q_2\}$ является носителем подрешетки с диаграммой, подобной диаграмме на рис. 12, *b*.

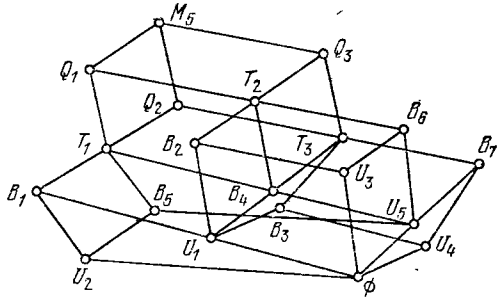


Рис. 25.

3. Используем описание пересечения и объединения двух элементов решетки $(F(R), \ll)$, данное в упражнении 6 третьей главы, и из решения примера 22 получаем истинность тождества (4), что вследствие примера 20 означает истинность и (5), т. е. дистрибутивность рассматриваемой решетки.

4. 1) Если $a \leqslant c$ и если выполняется указанное условие, то прежде всего $a \wedge c = a$ и $a \vee c = c$. Отсюда видно, что если переписать условие упражнения 4, то получится модулярный закон. 2) Если, с другой стороны, $\mathscr{P}$ — модулярная решетка, то достаточно вспомнить, что в каждой решетке $a \wedge c \leqslant c \leqslant a \vee c$ и, значит, $a \wedge c \leqslant a \vee c$. Используя определение модулярной решетки, получаем рассматриваемое в упражнении условие.

5. Эта решетка не модулярна и тем более, ввиду задачи 21, не дистрибутивна. Чтобы убедиться, что эта решетка не модулярна, возьмем на плоскости ρ прямоугольную систему координат и за прямую p примем ось x. Если A обозначает открытый круг, ограниченный окружностью с центром в точке (0,75; 0) и радиусом 0,25, C — круг с окружностью, имеющей центр в точке (0,5; 0) и радиус 0,5, а B — круг, ограниченный окружностью с центром в точке (—0,5; 0) и радиусом 0,5, то $B \vee C = B \vee A = I$, где I обозначает круг, ограниченный окружностью с центром в начале координат и радиусом, равным 1, а $B \wedge C = B \wedge A = \varnothing$. Поэтому $A \subset C$ и A, B, C, I, $\varnothing$ определяют носитель подрешетки с диаграммой на рис. 12, *b*, а тогда согласно примеру 25 рассматриваемая решетка не модулярна.

6. Эта решетка не дистрибутивна, поскольку она даже не модулярна. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим прилагаемый рису-

нок 26. В качестве выпуклых множеств A, B, C возьмем соответственно квадраты $KLMN$, $RSTU$, $PVWN$. Очевидно, $A \subset C$. В решетке $(K(\rho), \subset)$ наименьшим выпуклым множеством, содержащим как A, так и B, является $A \vee B$. Очевидно, это будет прямоугольник $NRSM$. Если K_1, K_2 — два выпуклых подмножества плоскости ρ,

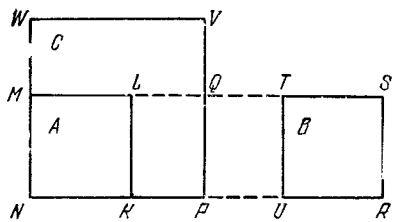


Рис. 26.

то, как следует из замечания к примеру 14, $K_1 \wedge K_2 = K_1 \cap K_2$. Тогда $(A \vee B) \wedge C$ равно пересечению прямоугольника $NRSM$ с квадратом $NPVW$, т. е. совпадает с прямоугольником $MNPQ$. Рассмотрим теперь выражение $A \vee (B \wedge C)$. Здесь $B \wedge C = B \cap C = \varnothing$, а наименьшее выпуклое множество, содержащее как A, так и пустое множество, есть множество A. Это означает, что $A \vee (B \wedge C) = A$.

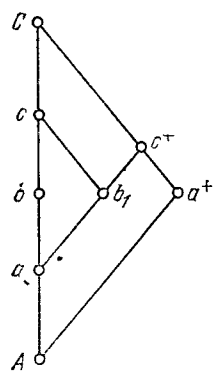


Рис. 27.

7. Так как $b \wedge a^+ \leqslant c \wedge c^+ = b_1$ (см. рис. 27), то $b \wedge a^+ \leqslant b \wedge b_1 = a$. Отсюда $b \wedge a^+ \leqslant a \wedge a^+ = A$ и, так как $A \leqslant b$ и $A \leqslant a^+$, то $A \leqslant b \wedge a^+$, — и $A = b \wedge a^+$. Далее, $b \vee a^+ \geqslant a \vee a^+ = c^+ \geqslant b_1$, и потому $b \vee a^+ \geqslant b \vee b_1 = c$. Аналогично $b \vee a^+ \geqslant c \vee c^+ = C$. Поскольку $b \leqslant C$ и $a^+ \leqslant c^+ \leqslant C$, будет $b \vee a^+ \leqslant C$, и отсюда необходимо $b \vee a^+ = C$.

8. а) Если применить (7) к $A_3 = a_3 = B \wedge c$, $b_3 = B$, $c_3 = C_3 = C$, $B_3' = c \geqslant B_3'' = b \vee (B \wedge c)$ и к $A_4 = a_4 = A$, $b_4 = B \wedge c$, $c_4 = C_4 = a \vee (B \wedge c)$, $B_4' = b \wedge [a \vee (B \wedge c)] \geqslant B_4'' = a$, то получается $b_1 = a \vee (B \wedge c)$ и аналогично $b_1 = c \wedge (B \vee a)$. Поэтому $c \wedge (b_1 \vee B) = c \wedge \{[a \vee (B \wedge c)] \vee B\} = c \wedge (a \vee B) = b_1$. b) Ввиду а) выполняется условие (6), и теперь достаточно применить теорему 3.

9. Используя дистрибутивность, получаем

$$[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c);$$

$$[c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b) = [c \wedge (a \vee b)] \vee$$

$$\vee [(a \wedge b) \wedge (a \vee b)] = [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c).$$

10. Предположим, что в (8) $b \leqslant c$; тогда получаем

$$[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge c),$$

$$[c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b) = c \wedge (a \vee b),$$

и потому решетка $\mathscr{P}$ модуляриа. Вследствие модулярности

$$V = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge (a \vee c) \wedge$$
$$\wedge [b \vee (a \wedge c)]$$

Из модулярности же

$$[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$$

и тогда ввиду (8)

$$[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b).$$

Если заменим здесь a на c, c на a, а b оставим без изменения, то

$$[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b),$$

и потому $V = a \wedge [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b) = a \wedge (c \vee b)$.

11. а) Используя модулярность и тот факт, что $b \vee c \geqslant b \vee (a \wedge c)$, получаем

$$d \wedge \beta = a \wedge (b \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) =$$
$$= a \wedge (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] =$$
$$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee \{[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)\} =$$
$$= [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] \vee [(a \wedge c) \wedge (a \vee c)].$$

Поскольку $a \wedge (b \vee c) \geqslant a \wedge c = (a \wedge c) \wedge (a \vee c)$, имеем

$$d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] =$$
$$= \{[a \wedge (b \vee c)] \vee b\} \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee c)$$

Подобные соотношения для γ получаются заменой c на b, b на c с сохранением a. Что касается выражения для β, то мы уже получили его в решении примера 10. b) Вследствие а), β и γ оба являются относительными дополнениями (в одном и том же интервале) элемента d, а потому ввиду (7) $\beta = \gamma$.

12. Согласно упражнению 8, b) $\mathscr{P}$ является модулярной решеткой, а из упражнений 11, b) и 10 следует, что она дистрибутивна.

13. а) Достаточно, например, выбрать $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$. b) В примере 24, а) мы показали, что эта решетка не дистрибутивна, так что тем более она не является булевой решеткой. Однако это решетка с дополнениями: дополнением точки T является плоскость ρ и обратно; дополнением данной прямой p, проходящей через точку T, будет любая прямая p_1, проходящая через точку T и отличная от p.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предложение 1. *В каждой решетке* $(P, \leqslant)$ *справедливы равенства*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

и

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Доказательство. Положим $u = a \vee b$, $v = b \vee c$, $p = u \vee c$ и $q = a \vee v$. Надо убедиться, что $p = q$. Но согласно свойству (2s) из определения точной верхней грани имеем $p \geqslant u$, $p \geqslant c$, $u \geqslant a$ и $u \geqslant b$. Учитывая транзитивность порядка, получаем $p \geqslant a$, $p \geqslant b$ и $p \geqslant c$, т. е. p оказывается верхней гранью множества $\{a, b, c\}$. Если x — какая-либо другая верхняя грань этого множества, то $x \geqslant a$, $x \geqslant b$ и $x \geqslant c$. Согласно свойству (3s) из определения точной верхней грани, получаем $x \geqslant u$, что вместе с $x \geqslant c$ приводит к $x \geqslant p$. Таким образом, p — наименьшая верхняя грань множества $\{a, b, c\}$, т. е. $p = \sup\{a, b, c\}$. Далее, используя (2s), получаем, что $q \geqslant a$, $q \geqslant v$, $v \geqslant b$ и $v \geqslant c$, откуда, как и раньше, приходим к выводу, что q — верхняя грань множества $\{a, b, c\}$. Если же x — какая-то другая верхняя грань этого множества, то ввиду (3s) имеем $x \geqslant a$ и $x \geqslant v$, откуда $x \geqslant q$. Следовательно, q — наименьшая верхняя грань множества $\{a, b, c\}$, т. е. $q = \sup\{a, b, c\} = p$. Второе равенство доказывается аналогично.

Предложение 2. *Если на некотором непустом множестве* P *определены операции* $\vee$ *и* $\wedge$, *обладающие свойствами* (S1) — (S3) *и* (P1) — (P3), *и если ввести отношение* $\leqslant$, *полагая* $a \leqslant b$ *тогда и только тогда, когда* $a = a \wedge b$, *то это отношение* $\leqslant$ *упорядочивает множество* P *и* $(P, \leqslant)$ *оказывается решеткой, причем* $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ *и* $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Доказательство. Ввиду (S3) $a = a \vee (a \wedge a)$, откуда, используя (P3), получаем

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a. \qquad (*)$$

Таким образом, $a = a \wedge a$, а значит, $a \leqslant a$, т. е. отношение $\leqslant$ рефлексивно. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a = a \wedge b$ и $b = b \wedge c$. Учитывая (P2), получаем

$$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c.$$

Отсюда $a \leqslant c$, т. е. отношение $\leqslant$ оказывается транзитивным. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = a \wedge b$ и $b = b \wedge a$, откуда

$$a = a \wedge b = b \wedge a = b$$

в силу (P1). Этим доказана антисимметричность отношения $\leqslant$. Таким образом, это отношение упорядочивает множество P. Из равенств

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$$

и

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b,$$

вытекающих из (P1), (P2) и (*), получаем, что $a \wedge b \leqslant a$ и $a \wedge b \leqslant b$, т. е. $a \wedge b$ оказывается нижней гранью множества $\{a, b\}$. Если x — какая-либо другая нижняя грань этого множества, то $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$, т. е. $x = x \wedge a$ и $x = x \wedge b$. Отсюда

$$x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x,$$

т. е. $x \leqslant a \wedge b$. Следовательно, $a \wedge b$ — наибольшая нижняя грань множества $\{a, b\}$, т. е. $a \wedge b = \inf \{a, b\}$.

Далее, из (S1) и (P3) вытекает

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

и

$$b \wedge (a \vee b) = b \wedge (b \vee a) = b.$$

Следовательно, $a \leqslant a \vee b$ и $b \leqslant a \vee b$, т. е. $a \vee b$ оказывается верхней гранью множества $\{a, b\}$. Если x — какая-либо другая верхняя грань этого множества, то $a \leqslant x$ и $b \leqslant x$, откуда $a = a \wedge x$ и $b = b \wedge x$. Теперь, используя (S3) и (P1), получаем

$$x = x \vee (x \wedge a) = x \vee (a \wedge x) = x \vee a$$

и

$$x = x \vee (x \wedge b) = x \vee (b \wedge x) = x \vee b.$$

Но тогда, учитывая (P3) и (S3), получаем

$$x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x,$$

после чего, используя (S1), (S2) и (P3), приходим к

$$a \vee b) \wedge x = (a \vee b) \wedge (x \vee b) = (a \vee b) \wedge ((x \vee a) \vee b) =$$
$$= (a \vee b) \wedge (x \vee (a \vee b)) = (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee x) = a \vee b.$$

Следовательно, $a \vee b \leqslant x$. Таким образом, $a \vee b$ оказывается наименьшей верхней гранью множества $\{a, b\}$, т. е. $a \vee b = \sup \{a, b\}$.

Предложение 3. *Решетка $(P, \leqslant)$ модулярна тогда и только тогда, когда для любых a, b, $c \in P$ из справедливости соотношений $a \leqslant b$, $a \vee c = b \vee c$ и $a \wedge c = b \wedge c$ вытекает, что $a = b$.*

Доказательство. Если решетка модулярна, а элементы a, b и c удовлетворяют указанным в формулировке соотношениям, то учитывая (P1), (S3), (P3) и модулярность, получаем

$$b = b \wedge (b \vee c) = b \wedge (a \vee c) = (a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b) =$$
$$= a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a.$$

Допустим теперь, что $a, b, c \in P$, $a \leqslant c$ и указанное в формулнровке свойство выполнено. Из упражнения 7 гл. 3 вытекает

$$a \vee b \leqslant [(a \vee b) \wedge c) \vee b \leqslant a \vee b$$

и

$$b \wedge c \leqslant [a \vee (b \wedge c)] \wedge b \leqslant [c \vee (b \wedge c)] \wedge b = c \wedge b = b \wedge c.$$

Отсюда

$$[(a \vee b) \wedge c] \vee b = a \vee b = a \vee [(b \wedge c) \vee b] = [a \vee (b \wedge c)] \vee b$$

и

$$[(a \vee b) \wedge c] \wedge b = b \wedge c = [a \vee (b \wedge c)] \wedge b.$$

Согласно упражнению 8, c) из гл. 3

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c.$$

Таким образом, элементы $a \vee (b \wedge c)$, $(a \vee b) \wedge c$ и b удовлетворяют данному условию и, следовательно,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Модулярность решетки P доказана.

Предложение 4. *Если решетка P не модулярна, то она содержит подрешетку с диаграммой, изображенной на рис. 12, b.*

Доказательство. Если решетка P не модуляриа, то согласно предложеиию 3 оиа содержит такие элементы a, b и c, что $a \lessdot c$, $a \vee b = c \vee b$ и $a \wedge b = c \wedge b$. Эти элемеиты и образуют искомую подрешетку.

Предложение 5. *Модулярная решетка P дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in P$ справедливо равенство*

$$(a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)] = (a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]. \qquad (**)$$

Доказательство. Согласно задаче 12, d) $ac \leqslant a \leqslant a \vee c$. Поэтому из (S1), (P1) и модулярности вытекает

$$(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)] = (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)].$$

Таким образом, равенство (**) имеет место тогда и только тогда, когда имеет место равеиство (8). Остается воспользоваться упражнением 10 из гл. 4.

Предложение 6. *Если решетка P не дистрибутивна, то она содержит или подрешетку с диаграммой, изображенной на рис. 12, a, или подрешетку с диаграммой, изображенной на рис. 12, b.*

Доказательство. Допустим, что P ие содержит подрешеток, изображеиных иа рис. 12, b. Тогда согласно предложеиию 4 решетка P модулярна. Далее положим

$$p = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)],$$

$$q = (a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]$$

и

$$r = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)].$$

Поскольку P не дистрибутивна, то по предложеиию 5 существуют $a, b, c \in P$ такие, что $p \neq q$. Ввиду (P1) задач 12, c) и 12, d) и упражнения 7, c) из гл. 3, $[c \wedge (a \vee b)] \vee (a \wedge c) = c \wedge (a \vee b)$,

$[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge b) = b \wedge (a \vee c)$, $c \wedge (a \vee b) \leqslant c \leqslant a \vee c$ и $b \leqslant a \vee b$. Поэтому, используя (S1), (S2), (P1), задачу 12, c) и модулярность решетки, получаем

$$\begin{aligned} p \vee q &= [(a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]] \vee [(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]] = \\ &= [(a \wedge b) \vee [[c \wedge (a \vee b)] \vee (a \wedge c)]] \vee [b \wedge (a \vee c)] = \\ &= [b \wedge (a \vee c)] \vee [(a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]] = \\ &= [[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge b)] \vee [c \wedge (a \vee b)] = \\ &= [b \wedge (a \vee c)] \vee [c \wedge (a \vee b)] = \\ &= (a \vee c) \wedge [b \vee [c \wedge (a \vee b)]] = \\ &= (a \vee c) \wedge [(a \vee b) \wedge (b \vee c)]. \end{aligned}$$

Аналогично выводим, что

$$p \vee r = (b \vee c) \wedge [(b \vee a) \wedge (a \vee c)]$$

и

$$q \vee r = (c \vee b) \wedge [(c \vee a) \wedge (a \vee b)].$$

Учитывая (S1) и (S2), получаем

$$p \vee q = p \vee r = q \vee r.$$

Ввиду задач 12, c) и 12, d) упражнения 7, c) из гл. 3 и свойства (P1),

$$a \wedge b \leqslant b \wedge (a \vee c) \leqslant (a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]$$

и

$$a \wedge c \leqslant c \wedge (a \vee b).$$

Поэтому модулярность вместе со свойствами (S1), (S2) и (S3) дает

$$\begin{aligned} p \wedge q &= [(a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]] \wedge [(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]] = \\ &= (a \wedge b) \vee [[c \wedge (a \vee b)] \wedge [(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)]]] = \\ &= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee [[c \wedge (a \vee b)] \wedge [b \wedge (a \vee c)]]] = \\ &= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]. \end{aligned}$$

Аналогично выводим, что

$$p \wedge r = (b \wedge a) \vee [(b \wedge c) \vee (a \wedge c)]$$

и

$$q \wedge r = (c \wedge a) \vee [(c \wedge b) \vee (a \wedge b)].$$

Учитывая (P1) и (P2), получаем

$$p \wedge q = p \wedge r = q \wedge r.$$

Если $p = r$, то

$$p \vee q = p \vee r = p = p \wedge r = p \wedge q.$$

Отсюда $p = q$ в силу задачи 12, f), что противоречит выбору элементов a, b и c. Таким образом, $p \neq r$. Аналогичнио устанавливается, что $q \neq r$. Следовательно, элементы $p \wedge q$, p, q, r и $p \vee q$ образуют искомую подрешетку, изображенную на рис. 12, *a*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1969.
2. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969.
3. Сикорский Р. Булевы алгебры. — М.: Мир, 1969.
4. Скорияков Л. А. Элемеиты теории структур. — М.: Наука, 1969.
5. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. — М.: Наука, 1980.
6. Фрид Э. Элемеитариое введение в абстрактную алгебру. — М.: Мир, 1979.
7. Яглом И. М. Необыкиовенная алгебра. — М.: Наука, 1968.
8. Яглом И. М., Болтяиский В. Г. Выпуклые фигуры. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. Beran L. Grupy a svazy — Praha: SNTL 1974.
10. Papy G. Mathématique moderne (Arithmétique). — Paris: Didier, 1966.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра булева 48

Грань верхняя 19
— — точная 19
— нижняя 19
— — точная 19

Дополнение 44
— относительное 44

Интервал 44

Квадрат декартов 10
Квазиупорядочение 18

Множество звездчатое 37
— упорядоченное 12

Носитель 12, 38

Объединение множеств 20
— элементов решетки 28
Отношение 10
— антисимметричное 11
— «делит» 9
— рефлексивное 11
— симметричное 12
— транзитивное 11

Пересечение множеств 20
— элементов решетки 28
Подмножество выпуклое 32
Подмножество замкнутое 38
Подрешетка 38

Решетка 24, 38
— булева 47
— дистрибутивная 38
— модулярная 43
— полная 24
— с дополнениями 47

У. м. 12
Упорядочение 12
— лексикографическое 34

Цепь 25

Эквивалентность 18
Элемент единичный 24
— наибольший 24
— наименьший 24
— нулевой 24

$a \wedge b$ 28
$a \vee b$ 28
$E(N)$ 26
$\inf_{\mathscr{P}} M$ 19
$K(\rho)$ 32
$\max_{\mathscr{P}}(a, b)$ 24
$\min_{\mathscr{P}}(a, b)$ 24
N 23
N_0 15
(N_0, σ_1) 15
$P(E)$ 16
Q 21
R 11
$\sup_{\mathscr{P}} M$ 19
Z 17

Ладислав Беран

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1981 г., 64 стр. с илл.

Редактор *Т. А. Панькова*
Техн. редактор *Н. В. Вершинина*
Корректор *В. П. Сорокина*

ИБ № 11716

Сдано в набор 10.09.80. Подписано к печати 26.03.81.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 3,36. Уч-изд. л. 3,44. Тираж 100 000 экз. Заказ 803.
Цена книги 15 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

№2878

15 коп.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **Н. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. И. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Мергулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Беран.** Упорядоченные множества.